UNIVERSIDAD DE CÓRDOBA

TESIS DOCTORAL

Juan Cortázar y su contribución a la formación matemática española en el siglo XIX

Para aspirar al grado de Doctora por la Universidad de Córdoba de
Dña. Carmen María León Mantero

Dirigida por Dr. D. Alexander Maz Machado

Programa de doctorado de Ciencias Sociales y Jurídicas
Grupo de Investigación de Educación
Departamento de Matemáticas

Córdoba, 2017

TITULO: *JUAN CORTÁZAR Y SU CONTRIBUCIÓN A LA FORMACIÓN MATEMÁTICA ESPAÑOLA EN EL SIGLO XIX*

AUTOR: *Carmen María León Mantero*

© Edita: UCOPress. 2017
Campus de Rabanales
Ctra. Nacional IV, Km. 396 A
14071 Córdoba

www.uco.es/publicaciones
publicaciones@uco.es

TÍTULO DE LA TESIS: Juan Cortázar y su contribución a la formación matemática española en el siglo XIX

DOCTORANDO/A: Carmen María León Mantero

INFORME RAZONADO DEL/DE LOS DIRECTOR/ES DE LA TESIS

El Dr. D. Alexander Maz Machado, Profesor del Departamento de Matemáticas la Universidad de Córdoba,

INFORMA:

Que la tesis doctoral titulada "Juan Cortázar y su contribución a la formación matemática española en el siglo XIX" de la que es autora Dª Carmen María León Mantero, ha sido realizada bajo mi dirección y cumple las condiciones exigidas por la legislación vigente para optar al título de Doctor por la Universidad de Córdoba.

Que relacionados con el tema de la tesis se han realizado las siguientes publicaciones:

1.- Artículos publicados en revistas

León-Mantero, C. y Maz-Machado, A. (2015). Juan Cortázar y sus aportaciones a la Educación Matemática española del siglo XIX. ENSAYOS, Revista de la Facultad de Educación de Albacete, 30(1), 55-62.

Revista indexada en Emerging Sources Citation Index (Web of Science) EBSCO, LATINDEX, ISOC (CCHS-CSIC), DICE, IN-RECS, Dialnet, IRESIE, CIRC, DOAJ, MIAR, RESH y CARHUS

León-Mantero, C. y Maz-Machado, A. (2017). El Tratado de Geometría Analítica de Juan Cortázar a través de sus ediciones. Epsilon. Revista de Educación Matemática. (Aceptado para publicación)

Revista indexada en MathEDU, LATINDEX, MIAR, Dialnet, CIRC, CARHUS Plus, RESH y DICE

2.- Capítulos de Libro

León-Mantero, C. y Maz-Machado, A. (2015). Una primera aproximación al Tratado de Álgebra Elemental de Juan Cortázar. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), Investigación en Educación Matemática XIX. Alicante: SEIEM. (ISBN: 978-84-9717-385-8)

León-Mantero, C. y Maz-Machado, A. (2016). Análisis comparativo de las primeras ediciones del Tratado de Álgebra superior de Juan Cortázar. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), Investigación en Educación Matemática XX. Málaga: SEIEM. (ISBN: 978-84-9747-948-6)

3.- Comunicaciones/Posters en congresos científicos

León-Mantero, C., Maz-Machado, A. (2014) Influencias y aportaciones matemáticas de Juan Cortázar a la Enseñanza Española del siglo XIX. Comunicación presentada en el IV Congreso Científico de Investigadores en Formación de la Universidad de Córdoba, del 18 al 19 de noviembre de 2014 en Córdoba, España.

León-Mantero, C., Maz-Machado, A., y Madrid, M.J. (2016). Fenomenología y representaciones en el Tratado de Álgebra elemental de Juan Cortázar. Comunicación presentada en el XVI Congreso sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (CEAM) del, 4 al 6 de julio de 2016 en Jerez de la Frontera, España.

Por todo ello, se autoriza la presentación de la tesis doctoral.

Córdoba, 12 de enero de 2017

Firma del director

Fdo.: Alexander Maz Machado

Esta tesis doctoral ha sido realizada en el seno del grupo de investigación
“Educación, diversidad y sociedad” SEJ477 del Plan Andaluz de Investigación,
Desarrollo e Innovación de la Junta de Andalucía

A José, por estos veinte años

y por cuarenta más.

Agradecimientos

Me gustaría expresar mi más sincero agradecimiento a todos los que han hecho posible la elaboración de esta tesis doctoral.

En primer lugar, a mi compañero, amigo y director de tesis, el doctor Alexander Maz, al que considero y siempre consideraré, mi padre académico. Gracias por la oportunidad, por las riñas, por tus orientaciones, por pensar siempre en el futuro de tus doctorandos, antes que el tuyo propio. Gracias.

A mis amigas y compañeras de equipo, Mª José y Noelia. A Mª José, porque las palabras, *esta tesis no hubiera sido posible sin tu ayuda*, cobran en ti, su más absoluto y sincero sentido; gracias por tu apoyo, por tus increíbles ideas, por haber abierto el camino. A Noelia, por convertir lo que yo creía un defecto, en mi más valiosa virtud; gracias por añadir un ladrillo más a mi crecimiento profesional y personal.

A mis compañeros de área, Nati, Rafa, Pepe y Paco. A Nati y Rafa, gracias por permitirme asistir a vuestras clases y comprobar que compartimos el mismo amor por la enseñanza; vuestra fuerza y pasión son una increíble fuente de inspiración para mí y para todos los que os rodean. A mi compañero de despacho, Pepe, gracias por enseñarme las piedras que hay en el camino y compartir conmigo todos tus años de experiencia. A Paco, gracias por estar siempre ahí, observando por una mirilla cómo logramos subir cada escalón.

A mis compañeros de la facultad de Ciencias de la Educación, por hacerme sentir parte de algo más importante que nosotros mismos. A los compañeros de la Biblioteca y el Fondo Antiguo, por poner a mi disposición todos los medios que he necesitado.

A los doctores Ana Elisa Esteves Santiago, António Manuel Dias Domingos y a los compañeros de la Universidad de Granada, gracias por haberme acogido y hacerme sentir como en mi propio hogar.

A los doctores José Ortiz y Ana Paula Florêncio Aires, por la revisión desinteresada de este trabajo.

A mis padres, que gracias a su sacrificio personal me han dado la oportunidad que ellos nunca tuvieron; gracias por darme la capacidad de seguir creciendo y el valor para afrontar nuevos retos. A mi pequeñaja, gracias por tu sonrisa, que me ha dado fuerzas para continuar, cuando pensaba darme por vencida.

A David, gracias por ayudarme a solucionar miles de crisis.

A José, mi mejor amigo y compañero de vida, sabíamos que no iba a ser fácil, pero juntos podemos con todo. Ahora te toca a ti lograrlo y a mí, apoyarte como tú siempre me has apoyado a mí.

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

1. INTRODUCCIÓN

Las investigaciones enmarcadas en el campo de estudio de la Historia de la Educación matemática, analizan la evolución histórica de los conceptos matemáticos y estudian todos aquellos aspectos que permitan conocer las razones por las cuáles estos adquirieron su significado actual, así como los avances que han sido incorporados a la enseñanza de la disciplina.

Por otro lado, el estudio de situaciones didácticas, instituciones escolares y personajes claves para la Educación matemática, nos permite contextualizar el conocimiento científico y académico de la época.

En este mismo sentido, el análisis de los libros de texto, que han sido herramientas fundamentales en la escuela, proporcionando soporte a alumnos y profesores y, estableciendo los escasos registros de información que han llegado hasta nuestros días permite establecer qué se enseñaba, cómo se enseñaba, cómo se divulgaban los conocimientos matemáticos de la época, el modelo organizativo del plan de estudios vigente y el contexto social, cultural y educativo.

Todo lo anterior motiva la elaboración de la presente investigación, que caracteriza la vida, la producción de libros de texto y las aportaciones a la Educación matemática del autor y académico español del siglo XIX Juan Cortázar Abasolo. En ella se atiende a los contenidos matemáticos incluidos en sus obras, a las evidencias didácticas planteadas para su enseñanza, a los cambios sufridos a través de las diferentes reediciones y sus respectivas justificaciones en base al contexto histórico.

Este estudio se encuentra dividido en cinco capítulos, en los que se desarrollan los siguientes aspectos de la investigación:

- Capítulo 2: Marco teórico. En él se establece la Historia de las Matemáticas y la Educación matemática como el campo de investigación en el que se enmarca este estudio, y específicamente, el estudio de personajes relevantes autores de libros de texto. Se revisan brevemente los estudios previos realizados a alguno de los tratados escritos por Cortázar y se expone la metodología de investigación centrada en el análisis de contenido, como herramienta fundamental para el estudio de libros de texto.

- Capítulo 3: Diseño de la investigación. En este capítulo se especifica el problema de investigación, así como los objetivos planteados y las preguntas a las que quiere dar respuesta. Para ello, se establecen los periodos en los cuales va a estar centrada la investigación y se recogen las etapas que esta recorrerá, entre las que se encuentran la selección de las fuentes documentales, de los criterios para el análisis de la información y el procedimiento seguido al realizar el análisis.
- Capítulo 4: Contexto histórico, científico y educativo. En él se revisa la situación política, social, científica y educativa que pudo influir directa o indirectamente en las aportaciones que Cortázar realizó a las Matemáticas y a la Educación matemática de su época. Por último, se aborda una breve semblanza que incluye los principales hechos de su vida y su trabajo como autor de libros de texto y como profesor de la disciplina.
- Capítulo 5: Resultados. En este capítulo se exponen los resultados de los análisis realizados a los libros de texto publicados por Cortázar, con respecto a la metodología y a los aspectos especificados en los capítulos anteriores.
- Capítulo 6: Conclusiones. En él se presenta una síntesis de las conclusiones obtenidas a través de los análisis realizados en el capítulo de resultados, así como el grado de consecución de los objetivos planteados, las limitaciones que presenta la investigación y las líneas futuras de trabajo que deja abiertas.

Las páginas finales de este estudio contienen, además de las referencias bibliográficas en las que se basa la investigación, el índice cronológico de los principales acontecimientos políticos y académicos ocurridos en España durante la vida de Cortázar, así como la línea cronológica del autor.

INTRODUCTION

Researches in the History of Mathematical Education's field of study analyze the historical evolution of mathematical concepts, study all those aspects that allow to know the reasons for which they acquired their current meaning and the advances that have been incorporated into the teaching discipline.

On the other hand, the study of didactic situations, school institutions and key figures for mathematical education, allows us to contextualize the scientific and academic knowledge of the time.

In this same sense, textbooks' analysis, which have been fundamental tools in school, providing support to students and teachers and establishing the scarce records of information that have reached today, allows us to establish what was taught, how it was taught, how the mathematical knowledge of the time was divulged, the organizational model of the current curriculum and the social, cultural and educational context.

All of the above mentioned motivates the elaboration of the present investigation, which characterizes the life, the production of textbooks and the contributions to the Mathematical Education of the XIX century Spanish author and academic Juan Cortázar Abasolo. It involves the mathematical contents included in his works, the didactic evidences raised for his teaching, the changes undergone through the different editions and their respective justifications based on the historical context.

This study is divided in five chapters in which, besides this introduction, the following aspects of the investigation are developed:

- Chapter 2: Theoretical framework. It establishes the History of Mathematics and Mathematical Education as the field of research in which this study is framed, and specifically, the study of relevant characters authors of textbooks. It's briefly reviewed the previous studies made to some of the treatises written by Cortázar and the research methodology focused on content analysis as a fundamental tool for the study of textbooks is exposed.
- Chapter 3: Research design. This chapter specifies the research problem, as well as the objectives set and the questions to which it wants to respond. To do this,

there are established the periods in which the research will be centered and the stages that it will cover, including the selection of documentary sources, the analysis of information criteria and the procedure followed to perform the analysis.

- Chapter 4: Historical, scientific and educational context. It revises the political, social, scientific and educational situation that could directly or indirectly influence Cortázar's contributions to Mathematics and Mathematical Education of his time. Finally, a brief summary is given that includes the main facts of his life and his work as author of textbooks and as professor of this discipline.
- Chapter 5: Results. In this chapter the results of the analyzes made to the textbooks published by Cortázar are presented, regarding to the methodology and aspects specified in the previous chapters.
- Chapter 6: Conclusions. It presents a synthesis of the conclusions obtained through the analyzes carried out in the results chapter, as well as the degree of achievement of the objectives set, the limitations of the research and the future lines of work that it leaves open.

The final pages of this study contain, in addition to the bibliographical references on which the research is based, the chronological index of the main political and academic events that occurred in Spain during Cortazar's life, as well as the chronological line of the author.

2. MARCO TEÓRICO

Este capítulo ofrece una fundamentación teórica sobre la línea de investigación en Historia de la Educación matemática, en la cual se enmarca el presente trabajo. Esta línea centra su atención en el desarrollo histórico del conocimiento matemático con el objetivo de encontrar indicios de naturaleza didáctica. En particular, el estudio de personajes que han influido en mayor o menor medida en la Educación matemática española y el análisis de los libros de texto relevantes, nos ofrece información privilegiada sobre la evolución de las ideas matemáticas y los procesos de enseñanza.

2.1. Historia e investigación en Educación

Es innegable la importancia que, para el ámbito de la Educación, tiene conocer aspectos del pasado de los sistemas educativos, las teorías y metodologías, la formación del profesorado, las instituciones, los planes de estudio, etc. La Educación debe entenderse como una dimensión más de nuestro pasado, relacionada con fenómenos sociales, económicos, políticos y culturales, que ayuda a comprender el proceso a través del cual, los conocimientos han llegado hasta nosotros (Sureda, 2003).

Fox (1981) define la investigación histórica en Educación como aquella que estudia de manera intensiva materiales ya existentes, pero que a día de hoy son desconocidos, para reconstruir acontecimientos del pasado que permitan aclarar problemas de interés actual mediante la elaboración de nuevos planteamientos y conclusiones. Para Cohen y Manion (1990) se trata, además, de un tipo de investigación que se debe promover con espíritu crítico, consiguiendo así una representación fiel de la época que está siendo estudiada, un nuevo entendimiento del pasado y su influencia en el presente y futuro.

Este acto de reconstrucción debe entenderse desde una perspectiva global, en el cual debe tenerse en cuenta el desarrollo social, cultural, económico e intelectual de los acontecimientos pasados sujetos a estudio. En este sentido, la investigación histórica, aporta soluciones a problemas presentes ya estudiados en el pasado; nos muestra las tendencias presentes y futuras; enfatiza la importancia de las interacciones entre las diferentes culturas; considera la posibilidad de revaluar los datos que se mantienen sobre el pasado (Hill y Kerber, 1967, citado en Cohen y Manion, 1990).

Las investigaciones históricas en el campo de la educación, pueden ofrecer valiosos beneficios a todos los miembros de la comunidad. El estudio histórico puede ayudar a entender la aparición y evolución de nuestro sistema educativo actual; puede mostrar cómo y por qué se han desarrollado las prácticas educativas; puede proveer a docentes de recursos y metodologías; incluso, contribuir a entender las relaciones establecidas entre la política, la educación y la sociedad (Cohen y Manion, 1990).

A su vez Sureda (2003) señala que,

> El estudio de la cultura escolar se interesa, a partir de un enfoque dinámico, en todos los mecanismos de socialización que se producen en el mundo escolar y su entorno, en los formalizados como son: las prácticas de enseñanza, los libros, los horarios y calendario, los espacios, los reglamentos, los uniformes, etc.; y en los no formalizados como son: las actitudes de los profesores, las expectativas que éstos tienen de los alumnos, las que tienen de ellos mismos los alumnos, la percepción social que se tiene de un determinado centro, el lenguaje o las formas de representación simbólica. (p. 29)

Muestra del creciente interés por los aspectos históricos en educación, son el nacimiento de numerosas revistas de investigación dedicadas al estudio del patrimonio histórico-educativo. Destacan las publicaciones internacionales de las revistas *History of Education, Revista Brasileira de Historia da Educação, Revista Mexicana de Historia de la Educación Anuario, History of Education Review Journal, Historical Studies in Education/Revue d'histoire de l'Education y Encounters on Education*.

A nivel nacional, la recientemente inaugurada *Revista de Historia y Memoria de la Educación* (2015), medio de difusión científico de la *Sociedad Española de Historia de la Educación* (SEDHE), viene a sumarse a la *Revista Interuniversitaria Historia de la Educación,* publicada por la Universidad de Salamanca desde 1982, a la *Revista Educació i Història* (1994), al *Anuario Galego de Historia da Educación Sarmiento* (1997), a la *Revista Historia Social y de la Educación* (2012) o la *Revista Espacio, Tiempo y Educación* (2014).

Se puede comprobar, a partir de las ponencias y comunicaciones en encuentros nacionales e internacionales, artículos publicados, tesis doctorales y monografías, que se trata de un amplio campo de investigación, en el que destacan núcleos temáticos como el de los profesores, familias y alumnos (Guereña, 2015; Viñao, 1994); el de las instituciones, el sistema educativo y la organización escolar (Del Pozo, 2005; Viñao, 1993); el de las prácticas educativas (Díaz, 1993; Goncalves, 2006); o el de las instituciones (Rodríguez, 2009).

2.2. Historia e investigación en Educación matemática

Conviene señalar los objetivos que persiguen los tres campos de estudio que intervienen en este trabajo de investigación, es decir, la Historia de las Matemáticas, la Historia de la Educación matemática y la Historia de las Matemáticas para la Educación matemática.

La Historia de las Matemáticas se preocupa de estudiar biografías de personajes históricos relevantes, de analizar la evolución y desarrollo de conceptos matemáticos, de descubrir demostraciones o soluciones históricas a problemas clásicos, de estudiar el desarrollo de símbolos y sistemas de notación, las matemáticas que eran conocidas en determinadas culturas y los centros e instituciones en los que se desarrollaban y estudiaban matemáticas. A nivel internacional, podemos destacar varios trabajos globales sobre historia de las matemáticas, como son los de Boyer (2003) o Smith (1958). Por tanto, el campo de investigación de la Historia de las Matemáticas para la Educación matemática, se encarga de estudiar cómo los aspectos anteriores son medio de difusión de las Matemáticas y sirven de recurso a la enseñanza (Maz-Machado, 2011).

Por el contrario, para la Historia de la Educación matemática, son objetivos de estudio fundamentales: la influencia de determinados manuales de texto en la formación matemática, de relevantes matemáticos o educadores en los métodos de enseñanza de las matemáticas o de los planes de estudio y legislaciones educativas de un determinado periodo en los procesos de enseñanza de las Matemáticas. Asimismo, se tienen en cuenta los recursos didácticos, tipos de problemas o los fenómenos usados en la enseñanza de las Matemáticas a lo largo del tiempo. A esto habría que añadir una nueva línea sobre historias de vida, recientemente consideradas, fuentes de información vitales para la investigación en Educación matemática (Maz-Machado, 2011).

2.2.1. Historia de las matemáticas y Educación matemática

El interés de los investigadores por conocer los usos de la Historia de las Matemáticas en educación, data de la segunda mitad del siglo XIX. Pero no fue hasta mediados del siglo XX cuando se consagró como un área propia de estudio mundialmente conocida.

En 1976 se constituyó el grupo *International Study Group on the Relations between History and Pedagogy of Mathematics* (HPM) afiliado a la *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI) con el objetivo de promover la difusión internacional de los avances del área, producir materiales y recursos para los profesores y promover la relevancia de la historia en la enseñanza de las matemáticas (Barbin y Tzanakis, 2014).

A mediados de los años 70, la red francesa de *Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques* (IREMs), comenzó a investigar y formar equipos de trabajo sobre Epistemología e Historia de las Matemáticas. Se organizaron varios congresos, las escuelas de verano *Summer University on the History and Epistemology in Mathematics Education* (ESU), que se extendieron a nivel europeo a partir de 1993 y se escribieron numerosos libros. Uno de ellos fue traducido al inglés y publicado por *The Mathematical Association* bajo el título, *History in the mathematics classroom*. El objetivo de estas actividades fue el de promover la integración de la perspectiva histórica en la enseñanza, como un medio para alcanzar el sentido y el significado del conocimiento matemático y la actividad matemática (Barbin, 1991).

Numerosos educadores e investigadores, creen firmemente en el valioso papel que la Historia de las Matemáticas juega en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Algunos consideran que no es posible separar el estudio de las Matemáticas del de su historia; otros, ven en la historia, una amplia gama de experiencias que pueden ayudar a la enseñanza de las Matemáticas (Fauvel y van Maanen, 2000).

A su vez, Furinghetti (2012) señala que la Historia hace posible que las Matemáticas se reconozcan como una actividad humana, lo cual permite ver las diferentes facetas de los conceptos y teorías matemáticas y saca a la luz los obstáculos que surgen en el estudio de las Matemáticas. Por otro lado, la Historia es, junto a la Epistemología, la disciplina adecuada para establecer objetivos matemáticos en determinados contextos problemáticos, como la evolución de ideologías, métodos, o vinculaciones con otras disciplinas.

La integración de la Historia de las Matemáticas en la enseñanza ayuda al profesor a asimilar mejor los contenidos matemáticos, a organizar los contenidos dentro del currículum, a ser consciente de la actividad matemática como actividad humana y, por tanto, a descubrir los errores y dificultades que han surgido en el desarrollo de dichos conocimientos. Para el alumno supone una motivación ver las Matemáticas como una actividad cultural, que se ha gestionado a lo largo del tiempo, lo que facilita comprender el origen de los conceptos y los problemas que han pretendido resolver (Sierra, 1997).

La lectura de textos antiguos en el aula, permite a alumnos y a profesores, descubrir las Matemáticas desde su perspectiva más humana, lejos del rigor y formalidad que las caracterizan. Barbin (1991) indica que la lectura de textos originales permite identificar la naturaleza de la actividad matemática, ya que se hace posible estudiar el contexto científico, filosófico, cultural y social en el cual se gestó el conocimiento matemático y ver el aspecto cultural de las matemáticas a través de un enfoque interdisciplinar.

En este sentido, Rico (1997) propone que la evolución histórica de los conceptos y ámbitos matemáticos constituye un organizador curricular, es decir, uno de los componentes fundamentales para articular el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas. Por un lado, informar a los alumnos sobre los antecedentes de algunos contenidos puede hacerles sentir interesados por sus distintas facetas. Por otro, revisar las dificultades que surgieron en el pasado sobre algún concepto o tópico, relativiza los errores cometidos por los alumnos y puede motivarles a superar sus propias dificultades de aprendizaje.

Asimismo, la Historia de las Matemáticas muestra el proceso por el cual, tanto los conceptos como las estructuras matemáticas han llegado hasta nuestros días revelando su dimensión social y cultural. Con lo cual, además de ser una fuente de motivación para el aprendizaje de las Matemáticas, aporta significado al conocimiento matemático y constituye un elemento de interdisciplinariedad curricular (Maz, Torralbo y Rico, 2006).

Los encuentros nacionales e internacionales celebrados regularmente, las numerosas publicaciones en revistas científicas, libros, manuales y actas de congresos, son una muestra de la relevancia actual de las investigaciones del área. Debemos mencionar el interés de publicaciones como *For the learning in mathematics* (1991; 1997), *Mathematics in school* (1998) o *Historical topics for the mathematical Classroon* (1969) del *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM), por fomentar el uso de la Historia de las Matemáticas en el aula, a través de monográficos especializados. Por otro lado, el grupo HPM ha llevado a cabo reuniones internacionales en Europa Canadá, Australia, Taiwán, México y Corea, en asociación con el *International Congress on Mathematical Education* (ICME).

Entre estas contribuciones destacan estudios sobre la evolución de conceptos o procedimientos (Barbin y Bernard, 2007; Kourkoulos y Tzanakis, 2011); estudios sobre el desarrollo de las matemáticas en un contexto cultural y social determinado (Barbin, 2010a; Furinghetti y Somaglia, 1997); o propuestas didácticas para introducir los aspectos históricos en el aula (Bagni, 2011; Barbin, 1991).

A nivel nacional, la investigación en Educación matemática también dedica algunas de sus publicaciones al uso de la Historia de las Matemáticas en la Educación matemática. Ejemplo de ello es el trabajo de Maz (1999) en el que se destacan las razones por las cuales el uso de la Historia de las Matemáticas es además de útil, altamente conveniente.

En el mismo sentido, Sierra (1997) desarrolla algunas de las ideas referentes al papel que juega la Historia de las Matemáticas en su proceso de enseñanza y los beneficios que aportan tanto a alumnos como profesores. En su trabajo, presenta cinco tópicos correspondientes a cada uno de los bloques temáticos de matemáticas establecidos en la enseñanza secundaria, en los cuales la componente histórica actúa como uno de los organizadores del currículo, que busca entre los alumnos un conocimiento más profundo de los temas tratados.

También González (2004; 2009) aporta numerosos argumentos por los cuales, la Historia de las Matemáticas se ha convertido en una potente herramienta con funciones didácticas, que además de enriquecer culturalmente la enseñanza de las Matemáticas, supone una inagotable fuente de material didáctico. En sus trabajos describe las relaciones mutuas que a lo largo de la historia se han establecido entre las Matemáticas y disciplinas como la Filosofía, la Religión o las Artes.

2.2.2. Historia de la Educación matemática

Aunque la Historia de las Matemáticas y la Historia de la Educación matemática han tenido objetos de estudio en común y, tanto documentos como personajes históricos han estudiados desde ambos enfoques, las nuevas corrientes de investigación argumentan que, aunque la enseñanza constituye un factor importante en el desarrollo de las Matemáticas, la relación entre ambos campos de investigación no puede seguir entendiéndose de manera tradicional (Schubring, 2014).

A pesar de que durante el siglo XIX y principios del XX, se realizaron algunos estudios sobre Historia de la Educación matemática, este campo de investigación se encuentra aún en pleno proceso de formación. Fue durante la celebración en 2004 del ICME cuando se institucionalizó a través del *Topic Study Group History of Teaching and Learning Mathematics*. Fruto de la internacionalización del área, la celebración de conferencias y congresos de carácter nacional e internacional y las contribuciones de investigadores de muchos países, se elaboró la primera bibliografía internacional, se publicó una monografía especial en la revista *Paedagogica Historica* y se fundó la primera revista especializada del área, la *International Journal for the History of Mathematics Education* (Schubring y Karp, 2014).

Por otro lado, la ESU lleva a cabo cada cuatro años, reuniones sobre Historia de la Educación matemática, así como las reuniones bianuales del grupo de Historia de la Educación matemática en el *Congress of European Research in Mathematics Education* (CERME).

De acuerdo con Maz, Torralbo y Rico (2006), la Historia de la Educación matemática es un campo de investigación

> que permite descubrir y comprender de qué forma los avances matemáticos en cada época son incorporados en la enseñanza de la disciplina, así como para identificar las corrientes filosóficas, políticas, sociales, económicas y culturales que han ejercido influencia en la forma de presentarlos y divulgarlos a través del sistema educativo imperante. (p. 9)

De tal forma que "investigar en educación matemática desde la perspectiva histórica no es narrar una serie de datos cronológicamente expuestos. Es indagar hechos, describir fenómenos y analizar datos; es ilustrar contextos y situaciones educativas; es integrar, interpretar y evaluar" (Picado y Rico, 2011, p.100).

El desarrollo de la Educación matemática se ha visto influenciado tanto por las necesidades sociales, como por la perspectiva política, filosófica y religiosa. Karp (2014) destaca la doble naturaleza de las investigaciones en historia de la educación matemática: histórica, respecto a la metodología de investigación y matemático-pedagógica respecto al objeto de estudio. La Historia de la Educación matemática forma parte de la Historia social, que solo adquiere significado cuando se identifican las conexiones entre la Educación matemática y todos los procesos que ocurren a su alrededor. A su vez, el análisis histórico se basa frecuentemente en estudios de libros de texto, que requieren, por parte de los investigadores, amplios conocimientos matemático-pedagógicos.

La Historia de la Educación matemática es un campo de estudio interdisciplinar que abarca la Historia, la Historia de las Matemáticas, la Historia de la Educación y la Sociología (Schubring, 2014):

- La Historia aporta su metodología de investigación, es decir, toma de la historia los procesos de búsqueda de fuentes y análisis de los datos.
- La Historia de la Educación evalúa el desarrollo general del sistema educativo en el que se produce la educación matemática.
- La Sociología ofrece numerosos enfoques de la investigación de su historia, debido al carácter esencialmente social de la evolución de los sistemas escolares.

Por todo lo anterior, la investigación en Educación matemática requiere una metodología más compleja que el estudio de la Historia de las Matemáticas. Ciertamente, la Historia de las Matemáticas forma parte de la historia cultural, política y social, pero su ocupación principal es el estudio del contenido matemático y la evolución de sus conceptos. Sin embargo, al ser las Matemáticas escolares el resultado de numerosas interacciones e influencias de y entre los diversos sectores de la sociedad, se hace necesario definir un mayor número de categorías de análisis que revelen todas las dimensiones de la educación matemática. (Schubring, 2006).

En una línea similar, Picado, Rico y Gómez (2015) indican que el fundamento y base teórica de los trabajos de investigación sobre la Historia de la Educación matemática como lo forman las Matemáticas, la Educación y la Historia. Las Matemáticas aportan las características formales y estructurales del conocimiento matemático, la Educación selecciona los contenidos y problemas de su enseñanza y aprendizaje y la Historia estudia la evolución de los conceptos y procedimientos matemáticos, los cambios metodológicos y escolares, sus antecedentes y su desarrollo.

Al mismo tiempo, la Historia de la enseñanza de las Matemáticas debería formar parte de la formación inicial de los profesores de Matemáticas (Schubring, 2006). Conocer la historia de su propia profesión, los problemas con los que se encontró en su desarrollo y los obstáculos que tuvieron que superarse para establecer la enseñanza de las matemáticas, capacita a los profesores a enfrentarse a los problemas que surgen en el ejercicio de su actividad.

Como cualquier disciplina histórica, la Historia de la Educación matemática se basa principalmente en el análisis de fuentes primarias, como son los libros de texto, cuadernos de alumnos, preguntas de examen, diarios, cartas, memorias, etc., sin limitar la investigación al carácter administrativo dado por decretos y leyes de planes de estudio. Debido a la gran cantidad de datos que pueden obtenerse de dichas fuentes, Schubring (1989) propone categorías teóricas que permitan un análisis efectivo de los datos históricos: entender la Historia de la enseñanza de las Matemáticas como parte de la historia social del conocimiento, considerar la naturaleza epistemológica de las matemáticas y el enfoque desarrollista de la enseñanza son algunos de los resultados obtenidos sobre la investigación de dichas categorías.

En aplicación de las categorías teóricas anteriores: el estado de las Matemáticas en el contexto de la educación general, la interacción entre la educación secundaria y superior, el papel del profesor de Matemáticas, la función del libro de texto en el contexto del proceso de enseñanza, la contribución de los autores de libros de texto, la relación entre conocimiento científico y escolar, la determinación cultural del conocimiento escolar o la transmisión de conocimientos entre diferentes cultural son algunas de las actuales líneas de investigación abiertas del área.

Entre las investigaciones históricas en Educación matemática, encontramos diferentes estudios desde la perspectiva internacional (Furinghetti, 2003; Schubring, 2003, 2012a; Sekiguchi, 2000), sobre la metodología de investigación (Karp, 2011; Schubring, 1989; Schubring y Karp, 2014), sobre personajes históricos relevantes (Schubring, 1987; Caramalho, 2008) focalizados en áreas geográficas concretas como África (Emereole, Shaka y Charakupa, 2002), Asia (Chan y Siu; 2012; Ueno, 2012; Volkov, 2012) o Europa (Furinghetti y Giacardi, 2012; Matos, 1989; Schubring, 2012b) y en los diferentes ámbitos de las matemáticas como el estudio de la Aritmética (Bjarnadóttir, 2014) o la Geometría (Barbin, 2010b).

Con respecto a la investigación realizada en España, uno de los grupos de trabajo creados en el seno de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) en 2003 es el de Historia de las Matemáticas y Educación Matemática (HMEM). El grupo cuenta con investigadores de diversas universidades como las Universidades de Córdoba, Granada, Salamanca, Valencia, Murcia, Zaragoza o Castilla la Mancha. A través de los *Seminarios de Investigación Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las Matemáticas y Educación Matemática* bianuales y las reuniones anuales del *Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, el grupo lleva a cabo su objetivo de difundir y promover la investigación española relacionada con la historia de la educación matemática.

Gómez (2011a) indica que la línea de investigación trazada toma como principal fuente de investigación los libros de texto con mayor influencia en la Historia de la enseñanza de las Matemáticas de nuestro país y orienta sus análisis hacia dos caminos fundamentales: identificar las bases del diseño curricular e identificar las raíces de los problemas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

A continuación, se incluye una clasificación no exhaustiva de temáticas del área, junto a algunos ejemplos de las contribuciones realizadas:

- Planes de estudio, legislación y libros de texto.
    - Vea (1995) describe la evolución de la enseñanza de las Matemáticas en los centros de educación secundaria a lo largo del siglo XIX.
    - Bruno y Martinón (2000) presentan cuáles han sido los contenidos matemáticos impartidos en los alumnos de la segunda enseñanza durante el siglo XX a través de los programas oficiales y su presentación en los libros de texto.
    - Moya (2004) aborda las reformas de enseñanza realizadas en España durante el siglo XIX y las dificultades encontradas ante una época de déficit científico.
    - Ausejo (2007) estudia el desarrollo de la enseñanza de las Matemáticas entre ingenieros en España durante el siglo XIX.
    - Vea y Velamazán (2011) documentan los contenidos matemáticos que se necesitaban para la obtención del título de ingeniero en las diferentes especialidades que fueron creadas en el siglo XIX.

    - Picado (2012) estudia la introducción de las unidades de pesas y medidas del Sistema Métrico Decimal en el sistema educativo español durante la segunda mitad del siglo XIX.

- Personajes relevantes.
    - Hormigón (1991) estudia las aportaciones matemáticas más importantes de García de Galdeano desde el punto de vista científico y didáctico.
    - Sánchez (1999) valora la situación de la ciencia españolа a finales del siglo XIX y las aportaciones del ingeniero Torres Quevedo a las Matemáticas y la Física.
    - Sánchez (2004) analiza las aportaciones a las Matemáticas y a la Física del científico español José Echegaray en el contexto de la ciencia de la segunda mitad del siglo XIX y la primera parte del XX.
    - Maz y Rico (2009) presentan una semblanza biográfica del autor del siglo XVIII Thomas Cerdá.
    - Maz, Rico y Torralbo (2006) y J. I. López (2011) centran su atención en la figura del matemático José Mariano Vallejo.
    - González (2013) describe el estilo característico de la práctica profesional diaria del Profesor Cuesta Dutari.
    - Sotos (2015) describe la biografía escolar y profesional de la maestra Maria Antònia Canals i Tolosa relacionada con la enseñanza de las Matemáticas.
- Conocimiento científico, histórico y social de la época.
    - Garma (1978) analiza la transformación de la enseñanza en el segundo tercio del siglo XIX a través de los cambios en los planes de estudio, las cátedras de Matemáticas y los libros de texto.
    - Peset, Garma y Pérez-Garzón (1978) ofrecen una visión global de la sociedad burguesa de mediados del siglo XIX y de la introducción, difusión y uso del conocimiento matemático.
    - Millán (1991) estudia los avances incorporados a la Geometría en España a lo largo del siglo XIX.
    - Ortiz (1996) analiza la transmisión del conocimiento matemático desde los países centrales de Europa hacia España, Portugal y Latinoamérica durante el siglo XIX.

    - Peralta (2009) describe el estado del conocimiento matemático en el siglo XIX a través de diferentes periodos caracterizados por la implantación de nuevas reformas educativas.
- Instituciones
    - Vea (1998) comprueba cómo se llevaron a la práctica las disposiciones legales que regulaban los centros de Segunda Enseñanza dentro del proceso de unificación en la España liberal del siglo XIX.
    - Lusa (2003) señala los avances tecnológicos introducidos en España a través de la Escuela de Ingenieros Industriales de Barcelona.
    - Carrillo (2004) estudió las condiciones institucionales de la Didáctica de las matemáticas como contenido de enseñanza en las Escuelas Normales del segundo tercio del siglo XIX.
    - C. López (2011) analiza los libros de texto de Aritmética y Álgebra en la formación inicial de maestros en el periodo que abarca desde 1839 hasta 1971.
    - Carabias (2013) realiza un estudio comparativo de los colegios mayores españoles desde su fundación hasta el presente, analizando sus orígenes, su importancia política y su interacción social.
    - Comas (2015) estudia la evolución de la enseñanza de las Matemáticas dentro de las Fuerzas Armadas española a lo largo del siglo XIX.
- Conceptos matemáticos.
    - Sierra, González y López (1999) analizaron el concepto de límite funcional en libros de texto de bachillerato y curso de orientación universitaria en el período 1940-1995.
    - Puig (1998) nos muestra la historia del Álgebra teniendo en cuenta entrelazando varias historias, entre ellas, la historia del sistema de signos o la historia de los conceptos de número.
    - González y Sierra (2002) estudian la evolución de los conceptos del análisis matemático en los libros de texto españoles desde que fue implantada su enseñanza en el plan de 1934 hasta nuestros días.
    - Maz (2005) establece el tratamiento dado a los números negativos en los libros de textos publicados en España durante los siglos XVIII y XIX.
    - Álvarez (2013) estableció la evolución del álgebra lineal durante la segunda mitad del siglo XIX y la primera parte del XX en España y en Colombia.

- Gómez (2014) aborda la ambigüedad de la raíz cuadrada y la polisemia del signo radical desde el punto de vista matemático y didáctico.

2.3. Análisis centrado en personajes relevantes de la Educación matemática

Schubring (1987) señala que las prácticas escolares no están tan determinadas por los planes de estudio como por los libros de texto. Sin embargo, estudiarlos de forma aislada o realizar comparaciones entre varios de ellos, tiende a descuidar el contexto social y cultural en el cual fueron escritos. Por ello, tomar como unidad de análisis, la personalidad de un autor y la totalidad de su obra, nos permite contextualizar el conocimiento escolar y la relación establecida entre el autor y el profesor que usa sus libros.

El estudio de Schubring (1987) establece categorías de análisis respecto a las cuales, puede estudiarse la vida y obra de personajes históricos autores de libros de texto: el rol del personaje como autor de libros de texto, cómo el autor hace uso de los conocimientos científicos que se suponen de dominio público, las estrategias comerciales de venta de libros, la relación entre el autor de los libros de texto y los profesores que harán uso de ellos, que la secuencia de contenidos incluya los conceptos básicos para la enseñanza, los tipos de libros y las influencias de los textos.

Por otro lado, reconstruir la historia de docentes que han resultado de alguna manera relevantes históricamente, nos muestra su trayectoria académica e intelectual, así como sus prácticas académicas en un determinado momento histórico, las cuales pueden ser recuperadas para darles un nuevo sentido en la actualidad (González, 2013).

Una de las categorías teóricas que Schubring (1989) propone como línea de investigación para una mejor comprensión de la realidad histórica, es el papel del profesor de matemáticas como profesional. Los estudios centrados en la figura del profesor de matemáticas, en cómo se desarrolla su formación, cuáles fueron sus publicaciones, cómo eran sus propuestas de examen, sus convicciones, etc., podrían ofrecer información clave para comprender la realidad de la enseñanza de las matemáticas actual desde una visión histórica.

En este sentido, destacamos algunas de las contribuciones realizadas a nivel nacional, centradas en las aportaciones de maestros, profesores, matemáticos o autores de libros de texto a la Educación matemática:

- Millán (1988) estudia la vida y obra de uno de los matemáticos más destacados de la primera mitad del siglo XX, Julio Rey Pastor.
- Girón y Girón (2010) realizan una semblanza de la figura del matemático José Andrés Irueste abarcando su formación, su práctica docente y sus escritos.
- Sierra y López (2011) presentan algunos datos biográficos de la maestra del siglo XX Margarita Comas, así como algunos resultados sobre su práctica docente de enseñanza de la Aritmética y el Álgebra en la formación de maestros durante los años 1931-1936.
- Maz-Machado y Rico (2013) realizan una semblanza biográfica del autor José Mariano Vallejo y realizan un análisis de su obra el Tratado elemental de matemáticas.
- Meavilla y Oller (2015) realizan la semblanza biográfica del académico andaluz Antonio Terry y describen los manuales de problemas resueltos que el autor desarrolló.
- León-Mantero, Madrid y Maz-Machado (2016) abordan la semblanza biográfica del matemático Agustín de Pedrayes y Foyo y sus aportaciones a la Educación Matemática.

Por el contrario, son escasos aquellos trabajos que estudian la vida y la totalidad de la obra de personajes históricos relevantes. En este sentido, cabe destacar los estudios realizados por Schubring (1987) y Caramalho (2008) sobre la figura de Lacroix como autor de libros de texto o el proyecto a nivel nacional, en el que se abordaron diversos aspectos de la vida y la obra de José Mariano Vallejo (Maz, Torralbo y Rico, 2006) tales como su semblanza biográfica, las primeras ideas que debían aprender los niños, el Cálculo Diferencial en su obra, el tratamiento de los números negativos o la enseñanza de la regla de tres.

Historias de vida y narrativas en Educación matemática

Dentro de este campo de estudio, es notorio el gran número de trabajos publicados recientemente que tienen como hilo conductor las historias de vida asociadas a la formación del profesorado y a la Historia de la Educación matemática y, como metodología de investigación a la narrativa (Bracho-López, Jiménez-Fanjul, Maz-Machado, Torralbo-Rodríguez y Fernández-Cano, 2014).

El uso de narrativas en los estudios de historias de vida, se ha afianzado como una potente herramienta de investigación para construir conocimiento en educación, la cual reclama una metodología de investigación distinta a la que utiliza una recogida y análisis de datos convencional, ya que narrar las vivencias de un sujeto e interpretar dichos hechos, requiere de su propia perspectiva de investigación cualitativa (Bolívar, 2002).

En este mismo sentido, Goodson (2003) asegura que el empleo de las narrativas para estudiar la vida y el trabajo de los docentes en su contexto histórico, ayuda a desarrollar nuevas perspectivas para la construcción social de la enseñanza y contribuyen a la producción de una variedad más amplia de conocimientos profesionales enfocados hacia el ámbito docente.

Algunos ejemplos de estos trabajos son los de Guedes (2010), Magalhães (2014), Ribeiro (2012) y Santos (2014). A nivel nacional, encontramos estudios sobre las aportaciones a la educación matemática de los profesores Cuesta Dutari (González, 2013), Maria Antònia Canals i Tolosa (Sotos, 2015), Escalante Gutierrez (Condori, 2011) y Negrete de Velasco (Carabias, 1992).

2.4. Análisis de los libros de texto en Educación matemática

Desde finales del siglo XVIII, el libro de texto se ha establecido como principal fuente de información y apoyo en las instituciones escolares, tanto para profesores como para alumnos. Ese auge debe sus razones a los importantes avances tecnológicos con respecto a ilustraciones y diseño editorial y a las políticas educativas impuestas por los planes de estudio (Gómez, 2001b; 2003).

Sin embargo, el interés de los investigadores en el campo de la historia de la educación matemática por analizar los libros de texto, surgió hace poco más de tres décadas. La imagen de los libros de texto como algo cotidiano y falto de singularidad, el carácter perecedero a instancia de los cambios producidos por los planes de estudio y la abundancia y amplia difusión de los textos escolares, son factores que pueden haber contribuido a mantener esta escasa atención (Choppin, 2000).

Según Gómez (2000),

> El libro de texto es una publicación especializada, con identidad propia, que nace en respuesta a las necesidades del sistema general y público de enseñanza y del modelo de enseñanza simultánea. Es un libro fácilmente reconocible por su estructura y porque está rotulado claramente indicando la materia que trata y a quién va dirigido. (Gómez, 2000, p.14)

Las necesidades surgidas por la implantación de los planes de estudio, dieron lugar a los manuales escolares, libros de texto usados en las escuelas recomendado por los profesores. El manual se caracteriza por la especial secuencia de contenidos que atiende a modelos de agrupación temática, de codificación de párrafos y epígrafes, de expresiones literarias que van desde estilos coloquiales a la formalidad que caracteriza al lenguaje matemático y de formas de orientar y dar ejemplos al lector. En definitiva, los manuales escolares representan el conocimiento institucionalizado en el sistema escolar, la implementación del currículo y el modelo organizativo del plan de estudios vigente (Gómez, 2011b).

Los manuales de texto tienen como objetivo prioritario transmitir a las generaciones más jóvenes, saberes y destrezas de un determinado de conocimiento, cuya adquisición será evaluada en el momento adecuado para asegurar su difusión a lo largo del tiempo. Pero además de ser depositarios de contenidos educativos, los manuales divulgan un sistema de valores, ya sean morales, religiosos o políticos. Por supuesto, son herramientas pedagógicas, ya que ponen en práctica metodologías de aprendizaje. Por último, forman parte del sistema económico de mercado, el cual influye tanto en su elaboración como en su impresión (Choppin, 2000).

Por ello, las recientes investigaciones en el campo de la Historia de la Educación matemática buscan en los libros de texto evidencias de interés didáctico que nos permitan entender los avances matemáticos incorporados en cada época, así como su evolución a lo largo de la historia. Además, nos dan acceso a situaciones, instituciones o personajes que han sido claves para la Educación matemática. En este sentido, los libros de texto se convierten en una herramienta fundamental, pues su análisis manifiesta qué se enseñaba, cómo se enseñaba y cómo se divulgaban los conocimientos matemáticos de la época, además de describirnos el contexto social, cultural y educativo (Maz-Machado y Rico, 2015).

A su vez, Choppin (2000) señala que los manuales suponen para los investigadores una fuente de valiosa y compleja información en multitud de ámbitos, abarcando cuestiones de educación, cultura, mentalidades, lenguaje, ciencias, economía del libro, técnicas de impresión o semiología de la imagen. Al mismo tiempo, los manuales escolares cumplen una doble funcionalidad. En primer lugar, son mundialmente considerados referentes que albergan el conocimiento científico que es de dominio público. Por otro lado, se convierten en el foco de las críticas vertidas a la institución escolar.

En este sentido, Schubring (1987) señala que el análisis de libros de texto debe entenderse desde el contexto en el cual los libros fueron elaborados. La metodología tradicional de análisis de libros históricos (análisis textual) sufre deficiencias que se incrementan cuando se analiza manuales escolares. El elevado número de manuales escolares con el que contamos, dificulta el establecimiento de referencias que midan las cualidades de los textos, como pueden ser la originalidad o la actualidad de la obra. Por ello, para una interpretación adecuada del texto, se hace necesaria la reconstrucción de los conocimientos y concepciones de los autores contemporáneos, además de la estructura cultural de la época.

Asimismo, Schubring (1987) propone algunos aspectos metodológicos para el análisis histórico de libros de texto focalizado en tres dimensiones:

- La primera dimensión consiste en analizar los cambios producidos entre las distintas ediciones de un libro de texto tomando un manual elemental como punto de partida, como puede ser texto sobre Aritmética o Álgebra.
- La segunda dimensión estudia los cambios que se producen entre obras que se ocupen de campos conceptualmente relacionados, como pueden ser textos de Geometría analítica o Trigonometría.
- Por último, en la tercera dimensión, se analizan los cambios dados en los libros de texto marcados por el contexto histórico en el que se desarrollan.

Las contribuciones surgidas del reciente interés de numerosos investigadores por la investigación en el campo de los manuales escolares pueden detectarse por la publicación del volumen 19 de la *Revista interuniversitaria Historia de la Educación*, monográfico dedicado al análisis de manuales pertenecientes a varias materias escolares, como son la

Física (Moreno, 2000), Lengua Española (Martínez, 2000); en zonas geográficas diferentes, como en Francia (Choppin, 2000) o Lationamérica (Ossenbach, 2000); o el abordaje de proyectos que estudian los manuales desde el punto de vista bibliométrico (Tiana, 2000).

Este último documento analiza los objetivos y los principales resultados obtenidos por dos proyectos similares que han elaborado bases de datos de manuales escolares. El primero de ellos, llamado *Proyecto EMMANUELLE*, se desarrolla en Francia desde 1980, bajo la dirección de Alain Choppin en el seno *del Institut National de Recherche Pédagogique del Service d´Histoire de lÉducation*, con una doble función, documental e investigadora. Los resultados del proyecto consisten en la publicación de varios volúmenes que recogen la legislación francesa con respecto a los manuales escolares de los siglos XIX y XX y los títulos de los manuales publicados en algunas materias escolares.

Inspirado en el anterior, fue creado en España en 1992, el *Proyecto MANES* dentro del *Departamento de Historia de la Educación y Educación Comparada de la Universidad Nacional de Educación a Distancia* (UNED), bajo la dirección del profesor Federico Gómez R. de Castro cuyo objetivo principal es la investigación y catalogación de los manuales escolares producidos en España, Portugal y Latinoamérica durante los siglos XIX y XX (Tiana, 2000).

La creación de registros de manuales escolares a través de los proyectos anteriores ha supuesto una importante contribución al campo de investigación. Sin embargo, el análisis de estos a partir de las bases de datos, necesita de criterios para elegir aquellos más relevantes para la investigación que se quiera emprender. Por ello, desde el estudio de Gómez (2011a), se establece un marco de referencia que agrupa los libros en torno a características comunes, que ayudan a focalizar el objetivo de las futuras investigaciones en historia de la educación matemática.

Centrando nuestra atención en las investigaciones que toman al libro de texto como fuente documental, destaca el estudio de Schubring (1988) en el que se analizan manuales de matemáticas alemanes y franceses para determinar el tratamiento que se le daba a los números negativos en la primera mitad el siglo XIX. También Beyer (2006) examina las aritméticas utilizadas en Venezuela durante el siglo XIX y Frejd (2013) estudia y compara libros antiguos de álgebra publicados en Suecia entre 1794 y 1836.

En España, se han realizado numerosas investigaciones centradas en la evolución de conceptos y contenidos de todos los ámbitos matemáticos a través de los libros de texto:

- Puig (1994) examina la historia de las ideas algebraicas a través del texto del siglo XIII, De Numeris Datis del autor Jordanus Nemorarius.
- Gómez (1995) presenta un catálogo de los métodos de cálculo mental categorizados y con lenguaje actualizado mediante un análisis histórico de los libros de texto.
- Gómez (1999) expone la evolución de la enseñanza de la proporcionalidad mediante la revisión de libros de texto distinguiendo en periodos, los escritos antes al siglo XIX y los escritos durante el siglo XIX en adelante.
- Maz (2000) analiza la evolución y los conflictos subyacentes a la aceptación de los números negativos en los libros de texto publicados en el siglo XVIII y XIX.
- Sierra, González y López (2003) analizaron el concepto de continuidad en los manuales de segunda enseñanza de la segunda mitad del siglo XX.
- Bermúdez (2005) analiza los orígenes y la evolución de la enseñanza de la Geometría descriptiva en la educación secundaria de 1836 a 1936.
- Esteves (2008) estudia la evolución histórica de los problemas de optimización y su tratamiento en la enseñanza secundaria portuguesa en los siglos XX y XXI.
- Rodríguez (2010) estudia el desarrollo conceptual de los métodos iterativos en la resolución de ecuaciones no lineales en los libros de texto desde un punto de vista didáctico.
- Puig y Fernández (2013) presentan un primer acercamiento a la *Arithmetica Algebratica* de Marco Aurel en el que incluyen una revisión de los estudios previos realizados de la obra y los textos que posteriormente aparecieron relacionados con ella.
- Sánchez (2015) estudia la evolución histórica de la Geometría analítica a lo largo del siglo XIX en España a través del tratamiento que se hace de ella en los libros de texto.
- Madrid (2016) analiza matemática y didácticamente los libros de aritmética publicados en castellano durante el siglo XVI.

La mayoría de las investigaciones citadas anteriormente centran su atención en el estudio de la evolución de los conceptos y contenidos matemáticos a través de los libros de texto publicados durante el siglo XIX. Debido a que estos trabajos abarcan el periodo en el que Cortázar publicó sus obras, encontramos en ellos, referencias y análisis parciales de algunos de sus tratados (Tabla 2-1). A continuación, se muestra de forma resumida, el objeto de estudio de cada uno de los trabajos citados:

- Maz (2000) analiza el contexto, la estructura algebraica y el tratamiento dado a los números negativos a los números negativos en el *Tratado de Álgebra elemental* de Cortázar.
- Bermúdez (2005) presenta los contenidos, el tipo de lenguaje y la estructura formal de los conceptos y resultados de Geometría descriptiva incluidos en el *Tratado de Geometría elemental*.
- Carrillo (2005) compara los contenidos aritméticos incluidos en los libros de texto usados en las Escuelas Normales en España desde 1838 hasta 1868, entre ellos el *Tratado de Aritmética* y la *Aritmética práctica para uso de las escuelas primarias* de Cortázar.
- Picado (2012) expone la presentación matemática y didáctica del Sistema de Numeración Decimal y del Sistema Métrico Decimal en la *Aritmética práctica para uso de las escuelas primarias de Cortázar*.
- Comas (2015) realiza una comparación de contenidos, tipo de lenguaje y estructura formal de los tratados de *Álgebra elemental*, *Trigonometría y Topografía*, *Aritmética* y *Geometría elemental* de los tres autores más influyentes en la formación de la Armada Española del siglo XIX, es decir, Ciscar, Montojo y Cortázar.
- Sánchez (2015) analiza el tratamiento matemático y didáctico dado a la Geometría analítica en el *Tratado de Geometría analítica* de Cortázar.

Tabla 2-1. *Estudios previos de las obras de Juan Cortázar*

TRABAJO	OBRA DE CORTÁZAR	AÑO (EDICIÓN)
Maz (2000)	*Tratado de Álgebra elemental*	1892 (31ª)
Bermúdez (2005)	*Tratado de Geometría elemental*	1852 (4ª)
Carrillo (2005)	*Tratado de Aritmética práctica para el uso de las escuelas primarias*	1856 (1ª)
	Tratado de Aritmética	1846 (1ª)
Picado (2012)	*Tratado de Aritmética práctica para el uso de las escuelas primarias*	1856 (1ª)
Comas (2015)	*Tratado de Álgebra elemental*	1857 (8ª)
	Tratado de Trigonometría y Topografía	1859 (6ª)
	Tratado de Aritmética	1860 (12ª)
	Tratado de Geometría elemental	1864 (12ª)
Sánchez (2015)	*Tratado de Geometría analítica*	1862 (2ª)

Esto pone de manifiesto que, aunque existen estudios puntuales de algunas de las obras de Cortázar centrados en contenidos particulares, no se ha realizado aún, ningún estudio global sobre sus obras. Todo ello motiva la realización de este estudio, que pone su foco de atención en la vida, la totalidad de la obra y las aportaciones a la Educación matemática del autor y académico español del siglo XIX Juan Cortázar.

2.5. Análisis de contenido

El empleo del análisis de contenido como técnica de investigación en ciencias sociales se remonta a los primeros años de este siglo. Si bien es cierto que, en el siglo XVIII en Suecia, los luteranos realizaron un análisis de contenido en una colección de himnos de autor desconocido, fue durante los años veinte cuando se desarrolló esta técnica se desarrolló intelectualmente y se incorporó a la Sociología, el Análisis de la comunicación y la Historia (Krippendorff, 1990).

Como señalan Fernández-Cano y Rico (1992), se trata de uno de los métodos más extendidos, para procesar los contenidos de la comunicación, que trabaja sobre la naturaleza del mensaje-discurso. Su campo de actuación se ha ampliado en los últimos años a las Ciencias políticas o la Psicología. Según el enfoque dado puede ser de tipo cualitativo o de tipo cuantitativo. En todo caso, su finalidad es la de descubrir la estructura interna de la comunicación.

Krippendorff (1990) define el análisis de contenido como "una técnica de investigación destinada a formular, a partir de ciertos datos [verbales, simbólicos o comunicativos], inferencias reproducibles y válidas que puedan aplicarse a su contexto" (p. 28). Es por ello, que la técnica del análisis de contenido aborda el análisis directo de los datos como fenómenos simbólicos y no como un conjunto de acontecimientos físicos. A su vez, Fox (1981) señala que se trata de un proceso intermedio entre la recogida de datos y su medición, que toma datos verbales o de conducta y los categoriza para que, posteriormente puedan ser analizados.

Cohen y Manion (1990) proponen el uso del análisis de contenido como técnica de investigación histórica en educación. En el caso del análisis de documentos educativos, además de aclarar el contenido de este, el método puede arrojar aclaraciones adicionales sobre la fuente de información, sobre el autor, sobre la población a la que el texto va dirigido, e incluso sobre el contexto social y político en el que ha sido escrito. En el caso del análisis del contenido de libros de texto en diferentes momentos de la historia, el método puede indicar las diferencias o cambios culturales que se han dado entre los diferentes periodos históricos.

Se trata de un método de investigación descriptiva que sigue unas determinadas fases en el proceso de análisis (Rico y Fernández-Cano, 2013):

- Delimitar el corpus de contenido a analizar. Este puede ser un texto, un discurso, una producción escrita, etc.
- Concretar la unidad de análisis. Estas pueden ser una palabra, una frase o un párrafo.
- Localizar o inferir en el texto las unidades de análisis.
- Denominar, definir e interpretar las categorías consideradas.

- Codificar y cuantificar mediante frecuencias o rangos las unidades de análisis previamente adscritas al sistema de categorías predeterminado (procedimiento deductivo) o inferir al sistema de categorías sobre las unidades de análisis seleccionadas (sistema inductivo).
- Relacionar el proceso de análisis de contenido con la cuestión que se indaga y con los agentes intervinientes, a saber, el hablante/escritor u oyente/lector.

En España, la técnica del análisis de contenido se ha venido usando en investigaciones en Educación matemática como método de estudio de los diferentes significados de conceptos y procedimientos matemáticos, que pueden aparecer en las producciones escolares (Rico y Fernández-Cano, 2013). Por ello, es una herramienta fundamental para el análisis de las matemáticas escolares desde el punto de vista de la formación de profesores o la innovación curricular. Muestra de ellos son:

- Los estudios de Gómez (2002; 2007), que analizan y abordan la problemática de la planificación curricular a nivel local, aportando a los profesores herramientas útiles para diseñar, desarrollar y evaluar unidades didácticas.
- El estudio de Rico, Marín, Lupiañez y Gómez (2008), que aporta herramientas para analizar y organizar los diferentes significados que admiten las matemáticas escolares, de cara a la planificación de unidades didácticas.

Por otro lado, el análisis de contenido en textos históricos permite llevar a cabo una adecuada selección de datos que lleven a interpretar el conocimiento matemático que sus autores quisieron transmitir e identificar el significado que se otorgó a determinados conceptos matemáticos en el sistema educativo (Rico y Fernández-Cano, 2013). Ejemplo de ello son los estudios:

- Maz (2009) analiza el concepto de número en los manuales matemáticos españoles de los siglos XVIII y XIX.
- Maz y Rico (2007; 2009) abordan el estudio de los números negativos en los libros de texto de matemáticas en España durante los siglos XVIII y XIX
- Maz-Machado, López y Sierra (2013) y Madrid, Maz-Machado y López (2015) realizan análisis de contenido a los manuales españoles de Aritmética del siglo XVI.

- Maz y Bracho (2013) estudian el concepto de fracción en libros de texto españoles del siglo XIX.
- Sierra y López (2013) abordan un análisis de contenido en manuales de Formación de Maestros de Aritmética y Álgebra españoles de los siglos XVIII y XIX.
- Picado, M., Gómez, B., y Rico, L. (2013) estudian los cambios curriculares en la enseñanza del sistema métrico decimal en libros de textos históricos de matemáticas españoles.

Por último, otro de los focos que recientemente tienen como herramienta de análisis la técnica del análisis de contenido, es la identificación de criterios o indicadores de actividad didáctica en los libros de texto:

- Azcárate y Serradó (2006) analizan las tendencias didácticas presentes en los libros de texto de Matemáticas de la Enseñanza Secundaria en España en relación a dos dimensiones: las diferentes formas de organizar y secuenciar los contenidos y la manera de organizar la estructura del discurso.
- Maz-Machado y Rico (2015) identificaron una serie de indicadores didácticos en los manuales españoles de matemáticas publicados en los siglos XVIII y XIX como la actualidad de los contenidos, la originalidad de estos, el rigor y la precisión, el interés social de las matemáticas, los principios filosóficos y didácticos y la revisión y síntesis de los contenidos conocidos en la época.

Todas estas contribuciones surgieron en el seno de los grupos de investigación *Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las Matemáticas y Educación Matemática* de la SEIEM, que han trabajado el análisis de contenido usando las siguientes categorías básicas que se derivan de la noción de organizador curricular y de la noción de significado establecida para los conceptos matemáticos escolares (Rico y Fernández-Cano, 2013):

- Conceptual, la cual considera el momento histórico y el marco poblacional donde se inserta el contenido matemático.
- Formal y estructural, que abarca los conceptos, definiciones y procedimientos, junto a la estructura formal que proporciona referencia a los contenidos utilizados
- Representacional, que comprende las notaciones gráficas, simbólicas, y sistemas de signos involucrados.

- Fenomenológica, que aborda los fenómenos que dan origen a los conceptos, los contextos en los que se utilizan y aquellas situaciones en las que se presentan y en las cuales se aplican, que dotan de sentido a los contenidos en estudio.

2.5.1. Organizadores curriculares

Rico (1997) define organizadores curriculares como "aquellos conocimientos que adoptamos como componentes fundamentales para articular el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas" (p. 46). Para que un tipo de conocimiento sea aceptado como un organizador curricular, este deber ofrecer "un marco conceptual para la enseñanza de las matemáticas, un espacio de reflexión que muestre la complejidad de los procesos de transmisión y construcción del conocimiento matemático y unos criterios para abordar y controlar esa complejidad" (p. 46). Por ello, los organizadores deben ofrecer a los profesores unos criterios para planificar, gestionar y evaluar todas las unidades didácticas que forman parte del currículo.

Además de las diversas ramas de conocimiento que conforman las Matemáticas, existen otros aspectos a tener en cuenta a la hora de estructurar el currículo de Matemáticas: los errores y dificultades detectados en el aprendizaje de las Matemáticas, el conjunto de representaciones y modelizaciones utilizadas para cada sistema conceptual, la fenomenología de los conocimientos implicados, la diversidad de los materiales de tipo manipulativo y la evolución histórica de cada concepto o conocimiento matemático, ofrecen al profesor la posibilidad de realizar un análisis de los contenidos matemáticos, que forme parte de sus tareas a la hora de planificar unidades didácticas (Rico, 1997).

Fenomenología

La fenomenología de los conocimientos y las aplicaciones prácticas de cada bloque de contenidos, engloban los fenómenos o situaciones en las que se emplean los diferentes conceptos y procedimientos tratados en cada unidad didáctica. A través del análisis fenomenológico, se pueden obtener orientaciones didácticas y directrices metodológicas que ayuden a organizar los contenidos correspondientes a cada tema. Por otro lado, establece objetivos de aprendizaje al servir de enlace entre la teoría matemática y la aplicación en la que toma significado (Rico, 1997).

Una de las componentes del análisis de contenido matemático es el análisis fenomenológico. Puig (1997) señala que el análisis fenomenológico de un concepto o de una estructura matemática consiste “en describir cuáles son los fenómenos para los que es medio de organización y qué relación tiene el concepto o la estructura con esos fenómenos” (p. 62).

Por otro lado, Gómez (2002) señala la necesidad de analizar la relación entre las Matemáticas y la experiencia para identificar, describir y clasificar los fenómenos de tipo natural, social o matemático que podemos encontrar en la estructura matemática analizada. El significado de los conceptos matemáticos se logra mostrando su conexión con los fenómenos del mundo natural, cultural, social y científico que están en el origen de tales conceptos (Rico, Marín, Lupiañez y Gómez, 2008).

Sistemas de representación

Las representaciones constituyen el conjunto de aspectos visuales y simbólicos del conocimiento matemático. A través de las representaciones, las personas expresan sus conocimientos de forma simbólica o gráfica y organizan su información sobre un concepto para después utilizarlo en situaciones prácticas (Rico, 1997).

Castro y Castro (1997) definen el concepto de representaciones como “las notaciones simbólicas o gráficas, específicas para cada noción, mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos matemáticos, así como sus características y propiedades más relevantes” (p. 96). En este sentido, la noción de representación está vinculada a los signos, notaciones, figuras y expresiones, que caracterizan a las Matemáticas. Estas se agrupan en dos familias, denominadas representaciones simbólicas y representaciones gráficas, que incluyen las diferentes escrituras simbólicas, el lenguaje verbal o natural, las figuras y gráficos, las tablas, cuadros y las notaciones algorítmicas que expresen los modos de operar.

Cada sistema de representación aporta un significado a la estructura matemática y permite trabajar con las propiedades del concepto que expresa. La diversidad de significados y facetas de un concepto o estructura matemática se hacen presentes en todos sus posibles sistemas de representación (Gómez, 2002).

2.5.2. Significado de los conceptos matemáticos escolares

Rico (2012) señala que el significado de un concepto matemático en el ámbito escolar atiende a tres componentes o dimensiones (Figura 2-1): los sistemas de representación, la fenomenología y la estructura conceptual.

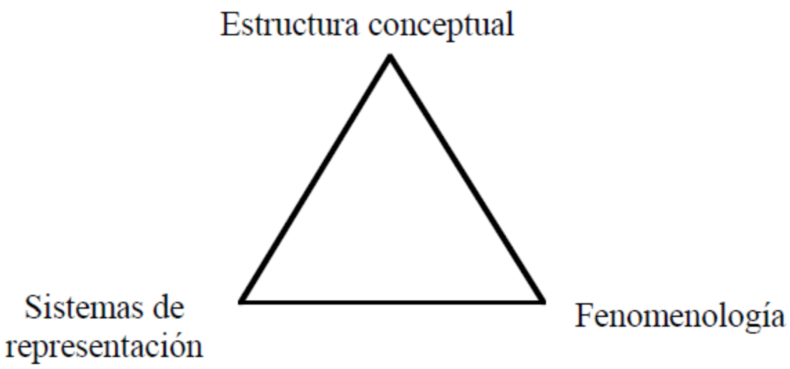


Figura 2-1. Triángulo semántico de un concepto matemático escolar (Rico, 2012)

Las dos primeras dimensiones han sido tratadas en el apartado anterior. Por otro lado, la estructura conceptual implica identificar y organizar los conceptos y estructuras matemáticas que se encuentran involucrados y las relaciones correspondientes a estos. En este sentido, los mapas conceptuales son herramientas que se adaptan al propósito de recoger, organizar y representar los aspectos de la estructura conceptual (Gómez, 2007).

La representación de la estructura conceptual a través de mapas conceptuales permite establecer relaciones entre el contenido conceptual y procedimental de las Matemáticas escolares. Entre las ventajas de los mapas conceptuales destacan la capacidad de establecer jerarquías de nociones dentro de cada concepto y de mostrar las relaciones y conexiones que existen entre cada una de ellas, enfatizando los conceptos principales con un mayor número de conexiones entre ellos y el resto de nociones (Rico, Marín, Lupiañez y Gómez, 2008).

3. DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo se presenta el diseño del proceso llevado a cabo en esta investigación. En primer lugar, se desarrolla el planteamiento en el que se define el problema de investigación y los objetivos que se propone alcanzar con ella. Por último, se expone el proceso de localización y selección de fuentes documentales, así como el establecimiento de los criterios necesarios que permitan analizar los datos.

3.1. Planteamiento de la investigación

A continuación, se define el problema de investigación, la pertinencia de esta y los interrogantes a los que intenta responder; se delimitan los periodos de estudio que se consideran en este trabajo; se establecen los objetivos a alcanzar; y se clasifica la modalidad de la investigación.

3.1.1. Problema de investigación

El problema de investigación del presente estudio es caracterizar las aportaciones a la Educación matemática de las obras de Juan Cortázar Abasolo, atendiendo a qué se enseña y cómo se enseña en ellas, los cambios sufridos a través de las diferentes ediciones y sus respectivas justificaciones en base al contexto histórico.

Juan Cortázar fue el autor que probablemente más contribuyó a la difusión y constitución de las matemáticas escolares en España y a la formación matemática de varias generaciones de españoles durante la segunda mitad del siglo XIX. Sus obras fueron reeditadas en 150 ocasiones (Tabla 3-1) y llegaron al medio millón de ejemplares vendidos, incluso fueron publicadas sin la autorización de su autor en París y Nueva York según su hijo, Daniel Cortázar, encargado de revisar y reeditar las obras tras la muerte de su padre, pone de manifiesto en la edición de 1897 del *Tratado de Geometría elemental* (García, 1984). Cortázar publicó 8 obras de contenido matemático, que se indican en la Tabla 3-1:

Tabla 3-1. *Obras publicadas de Juan Cortázar y número de ediciones*

OBRAS	PRIMERA EDICIÓN	ÚLTIMA EDICIÓN
Memoria para el cálculo del interés	1843	Única
Aritmética	1846	45ª, 1923
Geometría elemental	1847	37ª, 1917
Trigonometría y Topografía	1848	24ª, 1925
Álgebra elemental	1848	40ª, 1919
Álgebra superior	1849	6ª, 1885
Geometría analítica	1855	5ª, 1885
Aritmética práctica para el uso de las escuelas primarias	1856	Desconocido

Desde el año 1846, y de forma escalonada en el tiempo, los tratados elementales, *Aritmética, Algebra, Geometría, Trigonometría y Topografía*, comenzaron a ser elegidos para formar parte de la lista oficial de libros de texto a usar en Universidades, Institutos y Escuelas Profesionales que el Estado publicó periódicamente en las Órdenes:

- R. O. de 22 de agosto de 1846 (Gaceta de Madrid de 8 de septiembre)
- R. O. de 8 de septiembre de 1847 (Gaceta de Madrid de 11 y 24 de septiembre)
- R. O. de 14 de septiembre de 1848 (Gaceta de Madrid de 15 de septiembre)
- R. O. de 22 de septiembre de 1849 (Gaceta de Madrid de 25 de septiembre)
- R. O. de 26 de septiembre de 1850 (Gaceta de Madrid de 28 de septiembre)
- R. O. de 5 de septiembre de 1851 (Gaceta de Madrid de 6 de septiembre)
- R. O. de 15 de septiembre de 1852 (Gaceta de Madrid de 19 de septiembre)
- R. O. de 18 de septiembre de 1853 (Gaceta de Madrid de 21 de septiembre)
- R. O. de 13 de octubre de 1854 (Gaceta de Madrid de 18 de octubre)
- R. O. de 1 de octubre de 1855 (Gaceta de Madrid de 14 de octubre)
- R. O. de 26 de septiembre de 1861 (Gaceta de Madrid de 27 de septiembre)
- R. O. de 10 de septiembre de 1862 (Gaceta de Madrid de 13 de septiembre)

- R. O. para el trienio 1864/67 de 31 de agosto de 1864 (Gaceta de Madrid de 3 de septiembre)
- R. O. de 1 de septiembre de 1867 (Gaceta de Madrid de 16 de septiembre)

Asimismo, los tratados superiores, *Álgebra superior* y *Geometría analítica* aparecieron en las listas oficiales para las Facultades, Escuelas Superiores y Profesionales a partir del año 1856:

- R. O. de 15 de septiembre de 1856 (Gaceta de Madrid de 18 de septiembre)
- R. O. de 25 de septiembre de 1858 (Gaceta de Madrid de 1 de octubre)
- R. O. de 15 de octubre de 1861 (Gaceta de Madrid de 20 y 27 de octubre)
- R. O. de 10 de septiembre de 1862 (Gaceta de Madrid de 13 de septiembre)
- R. O. para el trienio 1864/67 de 31 de agosto de 1864 (Gaceta de Madrid de 3 de septiembre)
- R. O. de 22 de septiembre de 1867 (Gaceta de Madrid de 24 de septiembre)

Su producción abarca un amplio número de temas, para todos los ámbitos de las matemáticas y para todas las etapas educativas, desde la educación Primaria hasta la Superior y Técnica (Tabla 3-2). Incluso publica la obra *Memoria para el cálculo del interés*, cuyo objetivo fue el de instruir a las personas que no tenían conocimientos de álgebra, en el cálculo de intereses y descuentos y así, evitar que fueran engañados al firmar este tipo de contratos. Además de la publicación de sus tratados, Cortázar es autor de obras incompletas inéditas, como son los *apuntes de Cálculo infinitesimal, Mecánica racional*, *Cosmografía y Lógica matemática* (Irueste, 1912).

Tabla 3-2. *Obras publicadas de Juan Cortázar y público al que estaban dirigidas*

Memoria para el cálculo del interés	Todas aquellas personas que no conocen el Álgebra
Aritmética práctica para uso de las Escuelas Primarias	Primera enseñanza
Tratado de Aritmética	Segunda enseñanza, Universidad y Escuelas Profesionales
Tratado de Álgebra elemental	Segunda enseñanza, Universidad y Escuelas Profesionales
Tratado de Geometría elemental	Segunda enseñanza, Universidad y Escuelas Profesionales
Tratado de Trigonometría y Topografía	Segunda enseñanza, Universidad y Escuelas Profesionales
Tratado de Álgebra superior	Universidades y Escuelas Superiores
Tratado de Geometría analítica	Universidades y Escuelas Superiores

Las obras *Tratado de Aritmética*, *Tratado de Álgebra*, *Tratado de Geometría* y *Tratado de Trigonometría y Topografía* se establecieron como referencias de los académicos de la época quienes proponían a quien necesitase mayor profundización en el tema o demostraciones de proposiciones y teoremas, que consultara los textos de Cortázar (Giol y Soldevilla y Goyanes y Soldevilla, 1864). Otro indicador de la calidad y actualidad de las obras de Cortázar es que su *Tratado de Geometría*, fue aprobado por la London Association for the Improvement of Geometric Teaching en 1871 (Ortiz, 1996).

Por todo ello se considera relevante realizar una caracterización de las obras de Cortázar, tanto de los aspectos matemáticos que incluyen como de los aspectos y estrategias didácticas presentes en ellos.

Asimismo, este trabajo pretende dar respuesta a las siguientes cuestiones:

- ¿En qué medio académico, social y económico de la España del siglo XIX se desarrollaba la vida de Juan Cortázar?

- ¿Cuáles son los contenidos matemáticos que incluyen los libros de texto que conforman la producción de Juan Cortázar? ¿Cuál es el tratamiento dado a esos contenidos? ¿Cuál es su evolución a través de las ediciones de las obras? ¿Cómo influye el contexto social y académico en estos cambios?
- ¿Presentan las obras de Juan Cortázar evidencias de interés didáctico? ¿Cuáles son? ¿Cuál es su evolución a través de las ediciones de las obras? ¿Cómo influye el contexto social y académico en estos cambios?

3.1.2. Periodos

Con el objetivo de realizar una adecuada contextualización social y académica de la producción de Juan Cortázar, se han establecido tres periodos históricos diferentes caracterizados por la implantación de los dos planes de estudio más influyentes del siglo XIX. Estos periodos delimitarán la selección de las ediciones de los textos que serán analizadas. Estos periodos son:

- PERIODO 1: Del comienzo de la actividad de Cortázar como autor en 1838 hasta la implantación del Plan Pidal en 1845.
- PERIODO 2: Desde la implantación del Plan Pidal en 1845 hasta la implantación del Plan Moyano en 1857.
- PERIODO 3: Desde la implantación del Plan Moyano hasta la muerte de Juan Cortázar en 1873.

Tras la muerte de Cortázar, fue su hijo Daniel quien continuó revisando y reeditando sus obras hasta el primer cuarto del siglo XX. Por ello, no se ha considerado una etapa posterior a 1873 en el estudio.

3.1.3. Objetivos

El objetivo general de la investigación consiste en contextualizar la vida y obra del autor del siglo XIX Juan Cortázar desde el punto de vista de la Didáctica de las Matemáticas y relacionarlas con el contexto histórico en la que se desarrolla. Para ello, se plantearon los siguientes objetivos específicos:

- O1: Realizar un análisis de contenido de cada libro, con el fin de caracterizar qué se enseña y cómo se enseña.

- O2: Realizar un análisis de la actividad didáctica de cada obra con el fin de caracterizar las ideas latentes y las estrategias que podemos encontrar.
- O3: Realizar un análisis del planteamiento de las obras, indicando las distintas etapas por las que transcurre.
- O4: Realizar un análisis de los contenidos matemáticos incluidos en el currículo de la época.
- O5: Contextualizar la figura de Juan Cortázar social, histórica y académicamente.

3.1.4. Metodología de investigación

Se trata de una investigación *descriptiva* porque su finalidad es “describir situaciones, eventos y hechos, decir cómo son y cómo se manifiestan” (Sabariego y Bizquerra, 2009, p. 114). En este sentido, Cohen y Manion (1990) señalan que las investigaciones de tipo descriptivo “se interesan en describir las relaciones presentes entre variables en una situación dada y en dar cuenta de los cambios que ocurran en esas relaciones en función del tiempo” (p. 102).

En particular, esta se enmarca en el enfoque de investigación de *tipo histórico* puesto que, tal y como se señala en el Capítulo 2, la investigación histórica se define como “la situación, evaluación y síntesis de la evidencia sistemática y objetiva con el fin de establecer los hechos y extraer las conclusiones acerca de acontecimientos pasados” (Borg, 1963, citado en Cohen y Manion, 1990, p. 76).

Asimismo, se trata de un estudio de caso que utilizará una *metodología cualitativa* para analizar con profundidad la vida y producción del autor Juan Cortázar, puesto que este tipo de investigación establece al individuo como unidad de análisis, observa sus características y busca una descripción personal de este (Fox, 1981).

Por último, puede entenderse como un estudio *ex post facto*, que busca las aportaciones de las obras y el contexto en el que sucedió de forma retrospectiva. Puesto que se trata de “un método para obtener los antecedentes posibles de los hechos que han sucedido y, por tanto, no se pueden dirigir o manipular” (Cohen y Manion, 1990, p. 223), solo se pueden analizar sus posibles causas.

Para el análisis de los datos, se utilizará el método del *análisis de contenido*, desarrollado en el Capítulo 2 de esta investigación, el cual muestra la estructura conceptual de un concepto determinado en un momento histórico dado, los tipos de representaciones usadas y su evolución a lo largo del tiempo y el estado de desarrollo formal de un concepto a través del análisis fenomenológico (Maz, 2009).

3.2. Selección de las fuentes documentales

Entendemos por fuentes de datos primarias en la investigación histórica, los documentos orales o escritos proporcionados por los participantes en los hechos en reconstrucción (Cohen y Manion, 1990). Por ello se tomaron como fuentes primarias todas las ediciones de las obras escritas por Juan Cortázar (Tabla 3-3).

Tabla 3-3. *Obras de Juan Cortázar*

Tratado de Aritmética
Tratado de Álgebra elemental
Tratado de Álgebra superior
Tratado de Geometría elemental
Tratado de Geometría analítica
Tratado de Trigonometría y Topografía
Aritmética práctica para el uso de las escuelas primarias
Memoria para el cálculo del interés
Apuntes inéditos de Cálculo infinitesimal
Apuntes inéditos de Mecánica racional
Apuntes inéditos de Cosmografía
Apuntes inéditos de Lógica matemática

A continuación, se expone el proceso de búsqueda y localización de estas, y la elaboración de una serie de criterios que permitió una adecuada selección de las fuentes documentales.

3.2.1. Búsqueda y localización de las fuentes

La búsqueda de las ediciones de las obras de Juan Cortázar se realizó en:

- el Fondo Histórico de la Universidad de Córdoba,
- la Biblioteca de la Universidad Complutense de Madrid,
- la Biblioteca de la Universidad Politécnica de Madrid,
- la Biblioteca Digital Hispánica de la Biblioteca Nacional de España,
- el repositorio digital de Google Books y,
- la biblioteca personal de la autora de este trabajo.

En total fueron localizadas 110 ediciones de las obras escritas y publicadas por Cortázar (Tabla 3-4).

Tabla 3-4. *Ediciones localizadas de las obras publicadas de Cortázar*

OBRAS	EDICIONES LOCALIZADAS
Aritmética	1ª, 4ª, 5ª, 6ª, 7ª, 8ª, 10ª, 11ª, 12ª, 14ª, 15ª, 16ª, 17ª, 19ª, 21ª, 24ª, 25ª, 27ª, 29ª, 30ª, 31ª, 33ª, 34ª, 37ª, 38ª, 39ª, 40ª, 43ª y 45ª
Aritmética práctica	1ª
Álgebra elemental	1ª, 2ª, 3ª, 4ª, 5ª, 6ª, 7ª, 8ª, 11ª, 13ª, 14ª, 15ª, 16ª, 17ª, 21ª, 23ª, 24ª, 25ª, 26ª, 27ª, 28ª, 29ª, 30ª, 32ª, 34ª y 40ª
Álgebra superior	1ª, 2ª, 3ª, 4ª, 5ª y 6ª
Geometría elemental	1ª, 2ª, 3ª, 4ª, 5ª, 6ª, 7ª, 8ª, 9ª, 10ª, 12ª, 13ª, 15ª, 16ª, 19ª, 20ª, 22ª, 24ª, 26ª, 33ª y 37ª
Geometría analítica	1ª, 2ª, 3ª, 4ª y5ª
Trigonometría y Topografía	1ª, 2ª, 3ª, 4ª, 5ª, 6ª, 7ª, 8ª, 9ª, 10ª, 11ª, 12ª, 14ª, 15ª, 16ª, 17ª, 18ª, 20ª, 22ª, 23ª y 24ª
Memoria para el cálculo del interés	Única

3.2.2. Criterios para la selección de las fuentes

Los criterios que se tomaron para elegir una muestra apropiada y útil sobre la cual realizar el análisis fueron:

- Que el autor fuese Juan de Cortázar o haya sido publicada antes de 1873, eliminando por tanto de la muestra, las ediciones corregidas y editadas tras su muerte por su hijo Daniel.
- Que la obra estuviera disponible, seleccionando una muestra intencional y por conveniencia de las obras que sí fueron publicadas y que en la actualidad no tienen acceso restringido.
- Que los textos hubieran sido publicados en España y en español, eliminando así, los textos que fueron traducidos y publicados en Nueva York y París ilegalmente, sin la supervisión de Cortázar.

Tras la aplicación de los criterios anteriores, se encontraron 44 ediciones disponibles para ser analizadas (Tabla 3-5).

Tabla 3-5. *Ediciones disponibles de las obras publicadas de Cortázar*

OBRAS	EDICIONES DISPONIBLES
Aritmética	4ª, 5ª, 12ª, 16ª, 17ª, 19ª y 34ª
Aritmética práctica	1ª
Álgebra elemental	2ª, 4ª, 5ª, 7ª, 8ª, 13ª, 14ª, 15ª, 16ª y 28ª
Álgebra superior	1ª, 2ª, 3ª y 6ª
Geometría elemental	1ª, 2ª, 4ª, 6ª, 7ª, 8ª, 9ª, 10ª, 12ª y 33ª
Geometría analítica	1ª, 2ª, 3ª y5ª
Trigonometría y Topografía	1ª, 2ª, 3ª, 6ª, 10ª, 18ª y 20ª
Memoria para el cálculo del interés	Única

3.2.3. Textos seleccionados para el estudio

Finalmente, el listado de los textos seleccionados para el estudio en cada uno de los periodos es:

Primer periodo. Del comienzo de la actividad de Cortázar como autor en 1838 hasta la implantación del Plan Pidal en 1845

- Cortázar, J. (1843). *Memoria para el cálculo del interés*. Madrid: Imprenta y Fundición de E. Eusebio Aguado.

Segundo periodo. Desde la implantación del Plan Pidal (PP) en 1845 hasta la implantación del Plan Moyano (PM) en 1857.

- Cortázar, J. (1851). *Tratado de Aritmética*. Cuarta edición. Madrid: Imprenta de Espinosa y Cía.
- Cortázar, J. (1856). *Aritmética práctica para uso de las escuelas primarias*. Primera edición. Madrid: Imprenta de Don Gabriel Alhambra.
- Cortázar, J. (1849). *Tratado de Álgebra elemental*. Segunda edición. Madrid: Imprenta de Don A. Espinosa y Compañía.
- Cortázar, J. (1849). *Tratado de Álgebra superior*. Primera edición. Madrid: Imprenta de Don A. Espinosa y Compañía.
- Cortázar, J. (1847). *Geometría elemental*. Primera edición. Madrid: Imprenta y Fundición de E. Eusebio Aguado.
- Cortázar, J. (1855). *Tratado de Geometría analítica*. Primera edición. Madrid: Imprenta de Don Agustín Espinosa.
- Cortázar, J. (1848). *Tratado de Trigonometría rectilínea y esférica*. Primera edición. Madrid: Compañía de Impresores y Libreros del Reino.

Tercer periodo. Desde la implantación del Plan Moyano hasta la muerte de Juan Cortázar en 1873.

- Cortázar, J. (1851). *Tratado de Aritmética*. Décimo novena edición. Madrid: Imprenta de D. Antonio Peñuelas.
- Cortázar, J. (1856). *Tratado de Álgebra elemental*. Décimo quinta edición. Madrid: Imprenta de Antonio Peñuelas y Gabriel Pedraza.
- Cortázar, J. (1858). *Tratado de Álgebra superior*. Segunda edición. Madrid: Imprenta de D.F. Sánchez a cargo de D. Agustín Espinosa.
- Cortázar, J. (1864). *Geometría elemental*. Décimo segunda edición. Madrid: Imprenta de A. Peñuelas.
- Cortázar, J. (1862). *Tratado de Geometría analítica*. Segunda edición. Madrid: Imprenta de D.F. Sánchez a cargo de D. Agustín Espinosa.

- Cortázar, J. (1865). *Tratado de Trigonometría rectilínea y esférica*. Décima edición. Madrid: Imprenta de A. Peñuelas.

No se ha realizado el análisis de los cambios sufridos a través de las ediciones de la *Aritmética práctica para uso de las escuelas primarias*, debido a que solo se ha localizado la primera de sus ediciones.

3.3. Criterios para el análisis de la documentación

Una vez seleccionadas las ediciones de las obras que iban a ser analizada, se elaboraron una serie de campos para la recogida de datos centradas en la estructura de las obras y las ediciones, en la estructura conceptual y en las representaciones, fenomenologías y estrategias didácticas, que registraran y catalogaran toda la información que arrojan las obras. Estos campos fueron elaborados siguiendo las pautas de Maz (2005).

3.3.1. Campos para el registro de datos de las obras

Para obtener datos sobre la estructura general de cada obra, se seleccionaron los siguientes campos:

CO1: Categoría

Este campo asocia una categoría a cada una de las obras publicadas de Cortázar, en base a su contenido matemático. Este campo permite agrupar a las obras que exponen los mismos contenidos, el título de la obra sea diferente en alguna de las ediciones. Las categorías elegidas para este campo se muestran en la Tabla 3-6.

Tabla 3-6. *Categorías asociadas a las obras de Juan Cortázar*

OBRAS	CATEGORÍA
Aritmética	A
Aritmética práctica	AP
Álgebra elemental	AE
Álgebra superior	AS
Geometría elemental	GE
Geometría analítica	GE
Trigonometría y Topografía	TT
Memoria para el cálculo del interés	CI

CO2: Año de la primera edición y año de la última edición.

Se pretende determinar con exactitud la fecha de publicación de la primera y la última edición. Este campo nos permite ubicar el periodo de tiempo durante el cual la obra fue reeditada, y así poder contextualizar los cambios sufridos a través de las diferentes ediciones.

CO3: Número de ediciones.

Este campo indica la acogida y relevancia que tuvo la obra, y junto con la categoría anterior, identifica el ritmo al que la obra fue reeditada.

CO4: Ediciones localizadas y ediciones disponibles en cada periodo, año de publicación.

A través de este dato, podremos identificar con precisión las fechas de publicación de cada una de las ediciones, tanto de las que han sido localizadas, pero no se puede acceder a ellas, como de aquellas de las que se tiene plena disponibilidad.

CO5: Público al que va dirigido y objetivo(s) general(es).

Siempre que sea posible, se identificarán los lectores a los que iba dirigida la obra, así como los objetivos que el autor pretende conseguir con ella.

CO6: Valoración global de la obra de otros autores e investigadores.

Indica si la obra ejerció algún tipo de influencia en las obras de otros autores, así como las valoraciones que otros investigadores han realizado sobre ella. Este campo revela la importancia que los académicos e investigadores dieron a la obra.

Tabla 3-7. *Campos para el registro de las características de las obras*

CAMPOS	OBRA
CO1: Categoría	
CO2: Año de la primera edición y año de la última edición	
CO3: Número de ediciones	
CO4: Ediciones localizadas y ediciones disponibles en cada periodo, año de publicación	
CO5: Público al que va dirigido y objetivo(s) general(es)	
CO6: Valoración global de la obra de otros autores e investigadores.	

3.3.2. Campos para el registro de datos de las ediciones

Para obtener datos sobre la estructura general de cada una de las ediciones, se seleccionaron los siguientes campos:

CE1: Título de la edición.

Se indica el nombre completo de la obra.

CE2: Edición, año y periodo.

Se señala el número de la edición analizada, el año en la que se publicó y el periodo de tiempo en el que se ubica. Este campo nos indica el contexto temporal en el que la obra fue publicada.

CE3: Ciudad, editorial o imprenta.

Se señala el lugar y el nombre de la empresa o impresor que publica la edición. Este campo nos indica el contexto geográfico en el que la obra fue publicada.

CE4: Localización y situación por la que la obra llega a manos del investigador.

Se indica la procedencia y localización exacta de la edición analizada para que pueda ser utilizada en otra investigación.

CE5: Extensión, estructura y secuenciación de los contenidos.

Se indica el número de páginas de la obra, las partes y unidades básicas en las que está dividido: libros, capítulos, artículos, etc., las partes en las que está dividido: prólogo, índice, introducción, notas, láminas, etc. y la distribución de los contenidos.

CE6: Información de la portada y el prólogo.

Este campo incluye las advertencias y notas que el autor añadió en la portada y prólogo para informar al lector sobre aspectos que consideraba relevantes.

CE7: Autores en los que se basa y otras influencias.

Este campo indica los autores a los que se hace referencia en el texto, es decir, aquellos autores que influyeron en la obra en algún sentido. Este campo nos muestra a los autores de mayor influencia en la época y los textos que servían de referencia.

CE8: Observaciones.

Se indica cualquier información relevante que no haya sido considerada en ninguno de los campos anteriores.

Tabla 3-8. *Campos para el registro de las características de la edición*

CAMPOS	EDICIÓN
CE1: Título de la edición	
CE2: Edición, año y periodo	
CE3: Ciudad, editorial o imprenta	
CE4: Localización y situación por la que la obra llega a manos del investigador	
CE5: Extensión, estructura y secuenciación de los contenidos	
CE6: Información de la portada y el prólogo	
CE7: Autores en los que se basa y otras influencias	
CE8: Observaciones	

3.3.3. Campos para el registro de la estructura conceptual

Para registrar sistemáticamente los conceptos, estructuras matemáticas, la presentación y la secuenciación de los contenidos que entran en juego en cada obra, se han determinado los siguientes registros de acuerdo a su respectivo campo de estudio:

1. *Tratado de Aritmética*

- CCA1: Definición de aritmética, número, cantidad y unidad. Este campo recoge la definición explícita de los conceptos de aritmética, número, cantidad y unidad.
- CCA2: Operaciones elementales números enteros abstractos. Este campo recoge las operaciones que se realizan con los números enteros abstractos para conocer el tratamiento dado.
- CCA3: Nociones sobre la divisibilidad de los números enteros. Se recogen las definiciones, la notación y los resultados que el autor haya incluido sobre divisibilidad.
- CCA4: Definición de quebrado y operaciones elementales de los números fraccionarios. Se recoge la definición explicita del concepto de número fraccionarios, la notación usada y sus operaciones elementales para conocer el tratamiento dado.

- CCA5: Raíces de grado cualquiera. Se recogerán los conceptos relativos y la notación presente en la obra.
- CCA6: Nociones sobre proporciones. Se recogerán las definiciones, la notación, los ejercicios y problemas que se plantean.
- CCA7: Definición de número concreto y operaciones elementales. Se recoge la definición explicita del concepto de número concreto y sus operaciones elementales para conocer el tratamiento dado.

2. *Tratado de Aritmética práctica para el uso de las escuelas primarias*

- CCAP1: Definición de aritmética práctica, número y unidad. Este campo recoge la definición explícita de los conceptos de aritmética, número y unidad.
- CCAP2: Operaciones elementales números enteros abstractos. Este campo recoge las operaciones que se realizan con los números enteros abstractos para conocer el tratamiento dado.
- CCAP3: Nociones sobre la divisibilidad de los números enteros. Se recogen las definiciones, la notación y los resultados que el autor haya incluido sobre divisibilidad.
- CCAP4: Definición de quebrado y operaciones elementales de los números fraccionarios. Se recoge la definición explicita del concepto de número fraccionarios, la notación usada y sus operaciones elementales para conocer el tratamiento dado.
- CCAP5: Definición de número complejo y operaciones elementales de los números complejos. Se recogerá la definición explicita del concepto de número complejo, la notación usada y sus operaciones elementales para conocer el tratamiento dado.
- CCAP6: Nociones sobre proporciones. Se recogerán las definiciones, la notación, los ejercicios y problemas que se plantean.

3. *Tratado de Álgebra elemental*

- CCAE1: Definición de álgebra, cantidad, función y ecuación. Este campo recogerá la definición explícita de los conceptos anteriores.

- CCAE2: Números negativos y operaciones elementales. Se recogerá la definición explícita, la notación usada y sus operaciones para conocer el tratamiento dado.
- CCAE3: Cantidades algebraicas y operaciones elementales. Se recogerá la definición explícita, la notación usada y sus operaciones para conocer el tratamiento dado.
- CCAE4: Raíces y potencias. Se recogerá los conceptos relativos a los conceptos anteriores, sus operaciones fundamentales y la notación presente en la obra.
- CCAE5: Ecuación de primer grado. Se recogerán resultados, ejercicios y problemas que se plantean respecto a las ecuaciones de primer grado.
- CCAE6: Ecuación de segundo grado. Se recogerán resultados, ejercicios y problemas que se plantean respecto a las ecuaciones de segundo grado.
- CCAE7: Logaritmos y progresiones. Se recogerán definiciones, notación, ejercicios y problemas que se plantean respecto a logaritmos y progresiones.

4. *Tratado de Álgebra superior*

- CCAS1: Ecuaciones algebraicas. Se recoge la definición, notación y ejercicios sobre ecuaciones algebraicas.
- CCAS2: Series. Se recogerán definiciones y ejercicios que se plantean respecto a series.

5. *Tratado de Geometría elemental*

- CCGE1: Definición de geometría Se recoge la definición explícita de geometría.
- CCGE2: Ángulos, líneas, polígonos y circunferencias. Se recoge la definición explícita, la notación usada, ejercicios y problemas que se plantean respecto a ellos.
- CCGE3: Semejanza de polígonos. Se recoge la definición explícita, ejercicios y problemas que se plantean respecto a la semejanza.
- CCGE4: Áreas de figuras planas. Se recoge la definición explícita, ejercicios y problemas que se plantean respecto a áreas.
- CCGE5: Ángulos, planos, poliedros y cuerpos redondos. Se recoge la definición explícita, la notación usada, ejercicios y problemas que se plantean respecto a ellos.

- CCGE6: Áreas y volúmenes de figuras en el espacio. Se recogen las definiciones explícitas, ejercicios y problemas que se plantean respecto a áreas y volúmenes.

6. *Tratado de Geometría analítica*

- CCGA1: Definición de geometría analítica: plana y del espacio. Se recoge la definición explícita de los conceptos anteriores.
- CCGA2: Ecuaciones de las líneas en el plano. Se recogen las definiciones explícitas, construcción de la línea recta, círculo, elipse, hipérbola y parábola en el plano y los problemas que se incluyen.
- CCGA3: Ecuaciones de tangentes, normales, asíntotas, centros y diámetros de las curvas planas. Se recogen las definiciones explícitas, construcción de las ecuaciones en cada caso y los problemas que se incluyen.
- CCGA4: Coordenadas polares. Se recoge la definición explícita y ecuaciones de las líneas y los problemas que se incluyen.
- CCGA5: Ecuaciones de las líneas y superficies en el espacio. Se recogen las definiciones explícitas, construcción de las líneas rectas, el plano, las superficies en el espacio y los problemas que se incluyen.
- CCGA6: Ecuaciones de planos tangentes, centros y planos diametrales de las superficies curvas. Se recogen las definiciones explícitas, construcción de las ecuaciones en cada caso y los problemas que se incluyen.

7. *Tratado de Trigonometría y Topografía*

- CCTT1: Definición de Trigonometría rectilínea, Trigonometría Esférica y Topografía. Se recogen las definiciones explícitas de los conceptos anteriores.
- CCTT2: Líneas trigonométricas. Se recogen las definiciones explícitas, notaciones y operaciones fundamentales.
- CCTT3: Resolución de triángulos. Se recogen los tipos de ejercicios que se incluyen.
- CCTT4: Operaciones fundamentales de la Topografía. Se recogen las operaciones sobre Topografía y tipos de ejercicios que se incluyen.

8. *Memoria para el cálculo del interés*

- CCCI1: Nociones sobre interés. Se recogen las definiciones, resultados, ejercicios y problemas relativos al concepto de interés.
- CCCI2: Nociones sobre descuentos. Se recogen las definiciones, resultados, ejercicios y problemas relativos al concepto de descuento.

3.3.4. Campos para el registro de organizadores curriculares

Sistemas de representación

Como ya se señaló en el Capítulo 2, se entienden por representaciones las formas de expresar de manera simbólica o gráfica los conceptos matemáticos y sus propiedades más importantes, como por ejemplo son las representaciones verbales, algebraicas, simbólicas, gráficas, tabulares o notaciones algorítmicas (Castro y Castro, 1997). Por ello, para el análisis de los sistemas de representación, se adaptaron las siguientes categorías de Maz y Rico (2009a):

- Representaciones verbales. Son aquellas que usan la palabra para definir conceptos, enunciar propiedades y resultados, realizar demostraciones y proponer ejemplos, ejercicios y problemas.
- Representaciones simbólicas. Son aquellas combinaciones de números, signos y letras para resolver ejemplos y problemas o realizar demostraciones. Se distinguen dos tipos:
  - Algebraicas: aquellas que usan combinaciones de números con signos y letras.
  - Numéricas: aquellas que usan combinaciones de números y signos.
- Representaciones gráficas. Son representaciones de tipo visual como las gráficas de tipo geométrico, tablas o figuras:
  - Geométricas: aquellas que usan elementos geométricos como líneas, circunferencias o planos.
  - Tablas: aquellas que organizan y agrupan contenidos para mejorar su comprensión.
  - Figuras: aquellos dibujos que sirven para ilustrar objetos y lugares en proporción a sus medidas reales.

- Representaciones de notaciones algorítmicas. Son aquellas que usan líneas y símbolos para esquematizar los pasos de los algoritmos.

Tabla 3-9. *Tipos de sistemas de representación*

SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN		OBRA
Verbal		
Simbólica	Algebraica	
	Numérica	
Gráfica	Geométrica	
	Figura	
	Tabla	
Notación algorítmica		

Fenomenología

Asimismo, el análisis fenomenológico muestra cómo se usan y se aplican los conceptos y la manera de abordar los distintos ejemplos y ejercicios (Rico, Lupiáñez, Marín y Gómez, 2008). Por ello se examinaron los contextos o situaciones sociales, naturales y matemáticas, que se encuentran presentes en los conceptos, ejemplos y ejercicios propuestos en la obra y se establecieron las siguientes categorías basadas y adaptadas de Maz y Rico (2009a) y Madrid (2016):

- Fenómenos naturales y físicos. Son aquellas situaciones que se rigen bajo las reglas de la física o la naturaleza. Entre ellas encontramos:
  - Fenómenos de medida:
    - Desplazamientos: son aquellas situaciones en las que se estudia el cambio en la posición de un o más cuerpos en un tiempo determinado.
    - Cronológicos: son aquellas situaciones en las que se estudia la evolución de uno o más sucesos a lo largo del tiempo.
    - Capacidades: son aquellas situaciones en las que se estudia el volumen de líquido contenido en uno o más recipientes.
    - Masas: son aquellas situaciones en las que se estudia la masa de uno o más cuerpos.
    - Longitudes: son aquellas situaciones en las que se estudia la longitud de uno o varios cuerpos u objetos.

    - Superficies: son aquellas situaciones en las que se estudia la superficie de uno o varios cuerpos u objetos.
  - Fenómenos de agrimensura: Aquellas situaciones en las que se estudia las dimensiones y la forma de un terreno haciendo uso de las propiedades geométricas. Entre ellas encontramos:
    - Alineaciones: son aquellas situaciones en las que se construyen líneas rectas que alinean dos puntos del terreno.
    - Distancias: son aquellas situaciones en las que se debe calcular la distancia entre dos puntos del terreno, sea este accesible o no.
    - Alturas: son aquellas situaciones en las que se debe calcular la altura de un punto del terreno, sea este accesible o no.
    - Nivelaciones: son aquellas situaciones en las que se debe calcular la diferencia de nivel entre dos puntos de la horizontal.
    - Levantamiento de planos: son aquellas situaciones en las que se realiza el dibujo de un terreno en un plano a cierta escala.
    - Medición de áreas: son aquellas situaciones en las que mide la superficie que ocupa un terreno, sea accesible o no, esté nivelado o no.
- Fenómenos sociales. Son aquellas situaciones que estudian el comportamiento de los miembros de una sociedad.
  - Fenómenos laborales: son aquellas situaciones que estudian las variables implicadas en el desempeño de un trabajo, como el salario o la duración de las jornadas laborales.
  - Fenómenos financieros: son aquellas situaciones que estudian las variables implicadas en la gestión de capitales, como beneficios o pérdidas económicas de una operación.
  - Fenómenos comerciales: son aquellas situaciones que estudian las variables implicadas en una compra o una venta, como son los precios de compra o venta y las unidades compradas o vendidas.
  - Fenómenos de transmisión: son aquellas situaciones que estudian las variables implicadas en la cesión de capitales, como herencias y donaciones.
  - Fenómenos poblacionales: son aquellas situaciones que analizan la evolución en el número de individuos de una comunidad.
  - Fenómenos lúdicos. Son aquellas situaciones en las que se analiza el ganador de un juego, a cuánto asciende el premio o bien, la solución de una adivinanza.

- Fenómenos de equivalencia de medidas o monedas. Son aquellas situaciones en las que se estudia la equivalencia entre determinadas medidas o monedas.
- Fenómenos matemáticos. Son aquellas situaciones propias del ámbito matemático, como son el esclarecimiento de conceptos y procedimientos, las propuestas y resoluciones de ejemplos, ejercicios y problemas. Podemos distinguir entre dos tipos:
    - Aritméticos: son aquellas situaciones en las que se usan operaciones aritméticas.
    - Algebraicas: son aquellas situaciones en las que se usan operaciones algebraicas.
    - Geométricos: son aquellas situaciones en las que se usan resultados geométricos.

Tabla 3-10. *Fenomenología*

FENÓMENOS			OBRA
Naturales y físicos	De medida	Desplazamientos	
		Cronológicos	
		Capacidades	
		Masas	
		Longitudes	
		Superficies	
	De agrimensura	Alineaciones	
		Distancias	
		Alturas	
		Nivelaciones	
		Levantamiento de planos	
		Medición de áreas	
Sociales		Poblacionales	
		Laborales	
		Financieros	
		Comerciales	
		Transmisión	
		Lúdicos	
De equivalencia entre medidas o monedas			
Matemáticos		Aritméticos	
		Algebraicos	
		Geométricos	

3.3.5. Campos para el registro de estrategias didácticas

En último lugar, para registrar las estrategias didácticas, se ha considerado si las obras incluyen los siguientes campos:

- SCO: Secuenciación y justificación de contenidos originales propuestos con respecto a obras contemporáneas.
- SPM: Sugerencias y propuestas metodológicas.

- MM: Recomendaciones sobre materiales manipulativos.
- RG: Representaciones gráficas de apoyo a las explicaciones y demostración de teoremas.
- RP: Rigor y precisión en la presentación de los contenidos desde el punto de vista matemático, es decir, si su lenguaje es formal, ceñido a definiciones, axiomas, postulados, teoremas, problemas, demostraciones, corolarios y teoría.
- APL: Aplicaciones matemáticas y de la vida cotidiana

Tabla 3-11. *Estrategias didácticas*

ESTRATEGIAS	OBRA
Rigor y precisión	
Incluye representaciones gráficas	
Incluye estrategias y sugerencias	
Contenido y secuenciación originales	
Uso de materiales manipulativos	
Incluye aplicaciones	

3.4. Procedimiento para realizar el análisis

Una vez definidos los criterios para la recogida de información, se procederá a realizar un análisis de los datos de todas las obras seleccionadas mediante la técnica de análisis de contenido definida en el Capítulo 2.

Para ello, se tomaron para cada obra, las siguientes unidades de análisis:

- La introducción y el prólogo, en los que el autor señala a quienes estaban dirigidas, el propósito de las obras y la secuenciación y justificación de contenidos originales propuestos con respecto a obras contemporáneas.
- Las definiciones, los ejercicios, los ejemplos, los problemas y las actividades que se incluyen en cada obra. Asimismo, el propio planteamiento de cada obra.
- Las notas incluidas tras cada uno de los bloques de contenido, que incluyen sugerencias y propuestas metodológicas, así como materiales manipulativos recomendados, para que el alumno optimice su trabajo y alcance los conocimientos requeridos en el correspondiente nivel educativo.

- Los anexos, en los que se incluyen láminas con representaciones gráficas, que sirven de apoyo a las explicaciones y demostraciones de resultados y teoremas principales.

Tras el análisis de las obras, se realizará un análisis comparativo entre ellas de acuerdo a las dimensiones propuestas por Schubring (1987) definidas en el Capítulo 2. Por ello, serán analizados los cambios que se producen entre obras que se ocupan de campos conceptualmente relacionados y los cambios dados entre las diferentes ediciones de un libro de texto, marcados por el contexto histórico en el que se desarrollan.

El siguiente esquema (Figura 3-1) resume el procedimiento que se va a llevar a cabo:

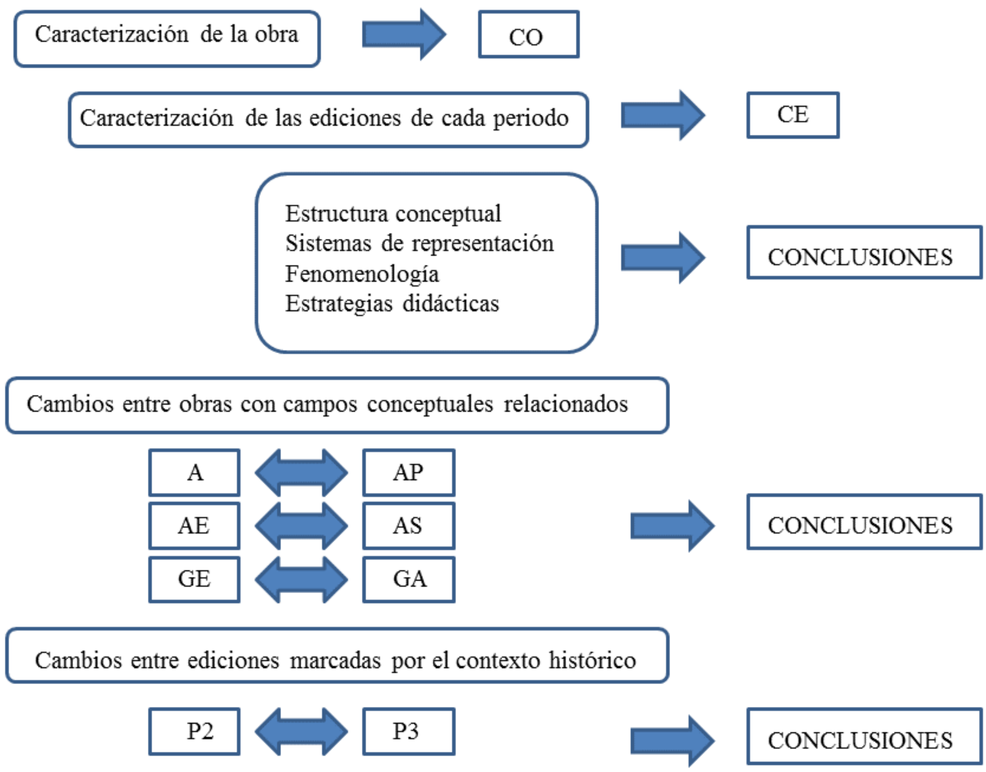


Figura 3-1. Esquema del procedimiento seguido para realizar el análisis

4. CONTEXTO HISTÓRICO, CIENTÍFICO Y EDUCATIVO

Este capítulo pretende realizar una revisión de los acontecimientos políticos, sociales, científicos y educativos que pudieron influir directa o indirectamente en las contribuciones de Juan Cortázar a las Matemáticas y a la Educación matemática. Asimismo, la última parte del capítulo incluye una breve semblanza de su vida que ayude a contextualizar su trabajo como autor de libros de texto desde su perspectiva como profesor de la disciplina.

4.1. Contexto histórico y social

4.1.1. Contexto histórico

Los comienzos del siglo XIX español estuvieron marcados por las guerras mantenidas con la naciente República francesa, Gran Bretaña y Portugal, bajo el mando del rey Borbón Carlos IV. El inicio del proceso revolucionario en Francia en 1789, provocó la desconfianza de las autoridades españolas, quienes decidieron unirse a la coalición de países europeos, que se enfrentaron a la República francesa tras la encarcelación y ejecución de Luis XVI en 1793. Sin embargo, la paz con Francia y la renovación de la alianza militar que había existido entre Francia y España durante el siglo XVIII fueron suscritas poco después en 1796.

Las guerras con Gran Bretaña, enemiga tradicional de España en el ámbito colonial, se suceden entre periodos de tregua, hasta que en 1805 la armada hispano-francesa fue derrotada en Trafalgar. Este suceso significó el fin de la flota española, la interrupción de las comunicaciones con América y una de las peores crisis de subsistencia que asolaron el país, debida al grave endeudamiento que sufría la monarquía.

En 1807, España permitió el paso de las tropas aliadas napoleónicas por la frontera y su asentamiento en las principales ciudades españolas con el objetivo de invadir Portugal y repartirla entre ambas naciones. Pero la crisis interna de la familia real que provocó la abdicación del rey Carlos IV en su hijo Fernando, dio a Napoleón la oportunidad de convertir a España en un país aliado de su imperio, obligando al rey Fernando VII a abdicar y situando en el trono español a su hermano José Bonaparte I.

Durante los seis años comprendidos entre 1808 y 1814, España luchó por su independencia frente a la ocupación francesa con grupos armados de campesinos y masas urbanas en una guerra de guerrillas. La colaboración de Gran Bretaña en la ofensiva española fue esencial para vencer a Napoleón, pues consiguieron empujar al ejército francés hacia los Pirineos y forzar su retirada en 1813.

Mientras casi toda la Península se encontraba ocupada por los franceses, España vivía el hundimiento político del Antiguo Régimen y la expectativa de establecer un nuevo modelo de Estado. Cádiz fue la ciudad elegida para reunir las Cortes y acordar y promulgar la Constitución de 1812, que recogía las bases de un Estado liberal: la monarquía constitucional, la soberanía nacional, la división de poderes, el sistema unicameral y la confesionalidad del Estado. Asimismo, se decretaron entre otros, la abolición de los privilegios gremiales, la abolición del tribunal de la Inquisición y garantizaron la libertad de prensa e imprenta.

Tras el fin de la guerra de la Independencia española, Napoleón reconoce en diciembre de 1813 a Fernando VII como rey de España. Los diputados de las Cortes de Cádiz, se establecieron en Madrid, con la esperanza de que el nuevo rey aceptara la obra legislativa llevada a cabo durante la ocupación francesa. Sin embargo, el rey Fernando se propuso restaurar la monarquía tradicional, promulgó un decreto declarando sin valor la legislación de las Cortes, los diputados fueron detenidos, se suprimió la libertad de imprenta, se restableció el tribunal de la Inquisición y los señoríos. Con respecto a la economía de España, la restauración del absolutismo supuso el mantenimiento de los privilegios de la aristocracia y la Iglesia, que se ampliaron a la alta burguesía, provocando la bancarrota de la hacienda del Estado.

La situación insostenible que atravesaba el país, provocó que en 1820 se sublevara en Cádiz un cuerpo del ejército compuesto en su mayoría por oficiales de ideología liberal. A ellos se unieron numerosos levantamientos en toda la Península que pedían el restablecimiento de la Constitución de Cádiz. La presión popular hizo firmar al monarca un manifiesto en el que se declaraba partidario leal de la Constitución con lo que ministros liberales comenzaron a gobernar y establecieron las libertades individuales y de prensa, se promulgó el primer Código Penal moderno, se concedió la libertad de industria y se abolieron los privilegios gremiales. Por otro lado, se elaboró el Reglamento de Instrucción

Pública, mediante el cual se establecía por primera vez la enseñanza pública gratuita y se dividía en tres grados: primaria, secundaria y universitaria.

La revolución acaecida en España coincidió con una oleada revolucionaria en toda Europa, que amenazó la estabilidad de sistema contrarrevolucionario establecido en el Congreso de Viena (1815) por la Santa Alianza, coalición formada por los principales países europeos a excepción de Gran Bretaña. Fue en 1822 cuando decidieron intervenir militarmente en España para establecer el Antiguo Régimen y aplastar la revolución. Sin previa declaración de guerra, un ejército francés entró en España y consiguieron sitiar al gobierno en Cádiz. En cuanto el rey se desplazó al campo francés para negociar una rendición, este declaró nulos todos los actos del gobierno durante el Trienio Constitucional (1820-1823).

Comenzaba un nuevo periodo de represión en España caracterizada por la persecución de los liberales supervivientes a la segunda invasión francesa. Durante la Década Ominosa (1823-1833) el Antiguo Régimen fue restablecido con pequeñas reformas destinadas a estimular la economía nacional, como la creación de la Junta de Fomento (1824), la publicación del Código de Comercio (1823) y la Creación de la Bolsa de Madrid (1831).

En 1833, la grave situación económica y financiera española, debida al atraso de la agricultura, la falta de instituciones financieras, se le sumó el conflicto sucesorio. Fernando VII solo tenía dos hijas, la primogénita Isabel había nacido en 1830, y aunque la ley Sálica había sido derogada por Carlos IV y el rey Fernando había nombrado a su esposa María Cristina, *reina regente en caso de enfermedad, ausencia o minoría*, el hermano del rey, Carlos María Isidro se negaba a reconocer la legitimidad de la princesa. Cuando Fernando VII murió en 1833, su hermano se autoproclamó Carlos V y sus partidarios se levantaron en armas, comenzando así una guerra civil que duró siete años, llamada primera guerra carlista.

Cuando la reina regente María Cristina se dio cuenta de que necesitaría apoyos para que su hija llegara a ser reina, se acercó a los círculos liberales que habían estado exiliados con los que se firmó una amnistía, se abrieron las universidades y se separó del ejército a los militares fieles a don Carlos. A partir de 1834 se nombró presidente del gobierno a un liberal moderado quien introdujo las primeras reformas liberales como la supresión definitiva del Tribunal de la Inquisición o la desaparición del monopolio de los gremios sobre la producción de las manufacturas y la autorización de la libertad de industria y comercio. Sin embargo, estas medidas fueron consideradas insuficientes por los liberales más radicales.

Durante el desarrollo de la guerra carlista, se sucede una revolución de la corriente progresista que obliga a la regente a poner a liberales progresistas al frente del gobierno. En 1836 algunos sargentos se sublevaron y la obligaron a firmar la Constitución de 1812, sin embargo, las Cortes decidieron redactar una nueva Constitución que se promulgó en 1837. Aun siendo esta una Constitución progresista, realizaba ciertas concesiones a los moderados, como el bicameralismo. Además, se afirmaba la autonomía de las Cortes, se implantaba la libertad de imprenta y la autonomía de los municipios, se ampliaba el sufragio censitario y se afirmaba la soberanía nacional.

En 1839 el ejército liberal y el jefe del ejército carlista llegaron a un acuerdo, el Convenio de Vergara, por el cual se llegaba al fin de la guerra. Aunque Don Carlos no se sintió satisfecho con este, se exilió en Francia y renunció a sus derechos al trono en favor a su primogénito Carlos Luis. El final de la guerra pareció consolidar el régimen liberal, sin embargo, no se alcanzó un entendimiento entre liberales moderados y progresistas. Cuando en 1840, la reina regente vuelve a España, se produce un pronunciamiento progresista que la hace abdicar en el general Espartero, quien se hace responsable de la regencia mientras la princesa Isabel alcanza la mayoría de edad. Esta situación crea precedentes en España, y los pronunciamientos militares que buscan controlar la situación política y controlar el gobierno se sucederán durante el resto del siglo XIX y parte del siglo XX.

Espartero, como nuevo regente, tuvo que hacer frente a una serie de problemas que dificultaron su labor en el gobierno: los moderados, que apenas obtuvieron representación parlamentaria, optaron por pronunciarse militarmente para intentar llegar al poder; la escisión provocada entre los propios progresistas al comprobar que Espartero pretendía gobernar de manera dictatorial; y la difusión de la noticia sobre el tratado de comercio libre que el gobierno pretendía firmar con Gran Bretaña, que vulneraba los intereses de los catalanes. A todo lo anterior se unió el malestar del levantamiento popular de carácter republicano de 1842.

En 1843, se inició en Andalucía un pronunciamiento contra Espartero, que más tarde fue generalizado a toda España, motivado tanto por moderados como por progresistas. Espartero fue derrotado obligado a vivir en el exilio. El gobierno provisional decidió adelantar entonces la mayoría de edad de la princesa Isabel, que comenzó a gobernar en 1843 con solo trece años. La alianza creada entre moderados y progresistas contra Espartero no duró mucho más. Los moderados se hicieron con el poder del gobierno, a la cabeza del moderado Narváez en 1844, apoyado por la reina, quien se negó a asignar a los progresistas, tareas en el gobierno, causando de nuevo enfrentamientos entre moderados y progresistas.

La década que discurrió entre 1844 y 1854, llamada Década Moderada, se caracterizó por una política centralizadora y uniforme en el país. Se creó el cuerpo de la Guardia Civil (1844) para proteger la propiedad y mantener el orden en la España rural. Asimismo, se reformó la hacienda (1845) gracias a Pidal, que intentaba acabar con la deuda pública, se promulgó la Constitución de 1845, que establecía la soberanía conjunta de las Cortes y la Corona, se restringía las competencias de los ayuntamientos y la libertad de prensa, estableciendo un duro control en las publicaciones.

La Década Moderada estuvo marcada por especulaciones de banqueros y empresarios con la complicidad del poder político, que manipularon el mercado para obtener ganancias extraordinarias, por ejemplo, con la construcción de los primeros ferrocarriles en 1844. Esto contribuyó a desprestigiar el gobierno de los moderados frente a los cuales emergió una oposición que se enfrentó a ellos mediante la política, a través de los pronunciamientos de los progresistas, y mediante lucha armada que los carlistas protagonizaron entre 1847 y 1849. En 1849, parte del movimiento progresista que luchaba por derechos fundamentales del pueblo, como la libertad de conciencia, el derecho de asociación y la instrucción pública gratuita, se separó y atrajo la atención de republicanos y socialistas, los cuales fueron determinantes para la caída de los moderados del poder.

El golpe de Estado llevado a cabo en Francia en 1851, influyó en las decisiones tomadas por el presidente del gobierno, quien clausuró las Cortes y quiso establecer una dictadura. Su proyecto fracasó y provocó su caída en 1852. A partir de ese momento, los choques entre moderados y las Cortes fueron frecuentes, incitando la revolución que en 1854 permitió la vuelta de los progresistas al poder, con Espartero al frente del gobierno.

Durante 1854-1856 (Bienio Progresista) los progresistas desarrollaron una intensa labor legislativa. La revolución permitió la vuelta al poder de los progresistas que gobernaron durante 1854-1856 (Bienio Progresista), desarrollaron una intensa labor legislativa: la Ley de Desamortización (1855), la Ley General de Ferrocarriles (1855), la Ley de Bancos y Sociedades de Crédito (1856) o la Constitución de 1856, que, aunque no llegó a promulgarse, limitaba el poder de la Corona y se establecía el principio de soberanía nacional y la igualdad de todos ante la ley.

Pero la tolerancia que Espartero demostró ante los conflictos protagonizados por campesinos y obreros en 1855, le hizo perder el apoyo de la Corona, provocando su dimisión y la subida de nuevo al poder de los moderados. Los dos años de gobierno moderado se caracterizaron por un programa de gobierno conservador que restablecía el régimen de 1845. De su labor legislativa destaca la aprobación de la Ley de Instrucción Pública (1857) de Moyano, que intentaba mejorar los niveles educativos de la sociedad española, que en aquellas fechas alcanzaban el 73% de analfabetismo.

Las diferencias entre los moderados, favorecieron la subida al poder en 1858, de la Unión Liberal, que agrupaba a los miembros más flexibles de entre los moderados y los progresistas. Durante su gobierno (1858-1863) se modificó la Constitución de 1845 dándole un sentido más liberal, se amplió el sufragio (ley electoral de 1858), se construyó la red de ferrocarriles y se apreció la afluencia de capitales extranjeros.

En febrero de 1863, un escándalo de corrupción dentro de la familia del presidente del gobierno, provocó la pérdida de confianza de la Corona en la Unión Liberal. A partir de ese momento, moderados y unionistas se alternaron en el poder, sin contribuir a estabilizar la situación del país, hundido en una situación de corrupción electoral y la grave crisis económica europea de 1865-1866, que también afectó a España.

Los últimos años del reinado de Isabel II se caracterizan por una grave situación económica. Aunque la economía en algunas zonas del País Vasco y Cataluña seguía creciendo gracias a la industrialización, España continuaba siendo un país agrario, cuyas tierras estaban en manos de una nobleza que no invertía en el campo y defendía una política librecambista que desfavorecía a la balanza comercial. Por otro lado, España sufrió la crisis europea de 1866, que extendió el pánico a la Bolsa de Barcelona, a la Bolsa de Madrid y a las demás ciudades comerciales de España. A esta situación, se le unieron graves problemas políticos, provocados por los enfrentamientos por la libertad de cátedra que protagonizaron el gobierno y los profesores y estudiantes universitarios (1865).

Tras dos cambios de gobierno, el primero de ellos unionista y el otro moderado, Isabel II intentó calmar la situación, pero no consiguió sino perder apoyo popular y de parte del ejército. Ello provocó la unión de todos los sectores de la oposición, que acordaron derribar a la monarquía y nombrar una Asamblea constituyente en un pacto cerrado en Bélgica en 1866. Demócratas, progresistas y republicanos acordaron que, mediante sufragio universal, se decidiría si se proclamaría una república o una nueva monarquía en España.

El golpe revolucionario se inició en 1868 en Cádiz, pero pronto se unieron Barcelona y Madrid. Los militares ocuparon Madrid, se formó el primer gobierno provisional revolucionario e Isabel II huyó a Francia. El gobierno provisional tuvo como objetivo convocar elecciones para Cortes constituyentes, cuyo resultado fue monárquico entre progresistas, unionistas y demócratas. El resultado era previsible porque la mayoría de los votos provenían de la España rural. Por el contrario, muchas ciudades votaron por las candidaturas republicanas. Asimismo, el gobierno provisional tenía como tarea presentar un nuevo proyecto de Constitución que se promulgó en 1869, bajo un modelo de Constitución democrática, que consagró los primeros artículos sobre los derechos individuales de los españoles.

Aprobada la Constitución y controlada las primeras reacciones de republicanos y carlistas, el gobierno provisional continuó su tarea de buscar candidatos al trono. Entre todas las candidaturas, se decidió aceptar la del príncipe alemán, Amadeo I, que comenzó su reinado en 1870 según los principios de la Constitución de 1869. Sin embargo, su reinado fue problemático pues no encontró aceptación entre importantes grupos de presión, la coalición política del gobierno provisional se fraccionó al morir asesinado el presidente del gobierno y los carlistas comenzaron una nueva guerra que afectó especialmente al País Vasco y a Cataluña. Amadeo no lograba controlar la situación política española y en 1872 los estallidos de sublevaciones de tipo republicano se intensificaron. Por ello, en 1873 anunció su decisión de abdicar, devolvió a las Cortes la Corona renunciando así al trono y los diputados del Congreso se vieron obligados a proclamar la República que España pedía en las calles.

Por tanto, se proclamó la primera República de tipo federal, fundada en las bases de la Constitución de 1869, no sin encontrar la hostilidad de todas las fuerzas conservadoras; los carlistas, que continuaron luchando en la guerra con más fuerza que antes; la nobleza y amplios sectores de la alta burguesía; y, sobre todo, los militares, que no aceptaron un régimen que abolió las quintas. Pronto el Estado se vio envuelto en una gran anarquía, dentro del cual surgió el movimiento cantonal, cuyo propósito era el de establecer una libre federación de cantones. Tras varios intentos de gobierno, luchas contra la revuelta social y los militares conspirando de manera abierta, el capitán Pavía se presentó en el Congreso de los diputados, dio un golpe de Estado en 1874 y disolvió las Cortes.

El propósito fundamental del nuevo gobierno era establecer la autoridad y el orden en todo el país. Para ello debían acallar tanto las revueltas civiles, como la guerra con los carlistas, lo cual se consiguió en 1874. Mientras tanto, las restantes fuerzas políticas y la mayoría de clases sociales, decidieron que se restaurara la monarquía en el príncipe Alfonso, hijo de Isabel II. En 1874, comenzó el reinado de Alfonso XII, el primero de la Restauración.

4.1.2. Contexto social

El acontecimiento demográfico más importante en la historia de España se dio en la primera mitad del siglo XIX, durante la cual la población creció desde los diez millones hasta los más de quince millones de habitantes que tenía en 1860. Acompañando a este crecimiento, se dieron grandes cambios económicos debidos a los inicios de la industrialización o la expansión de los ferrocarriles.

Para aliviar la grave situación económica provocada por las monarquías absolutistas, el gobierno había estado llevando a cabo durante la primera parte del siglo, diversas desamortizaciones de los bienes eclesiásticos. Sin embargo, su efecto no fue el esperado pues las extensiones de terreno no fueron a parar a una nueva clase media agraria, sino que se formaron grandes propietarios de latifundios. Los censos revelan que, en el umbral de la segunda revolución industrial, España era fundamentalmente un país rural, formado por campesinos que trabajaban la tierra con sistemas arcaicos.

En 1833 alrededor del 80% de la población española era analfabeta, tenían niveles de renta bajos que apenas les permitía comer y debían recurrir a la caridad. El Estado no cubría sus necesidades sanitarias ni educativas. La situación de la sociedad española era más preocupante aún si se comparaba con los avances que el proceso industrializador había traído a países como Gran Bretaña o Francia. La economía española, basada en la agricultura se encontraba atrasada y la actividad industrial y comercial se encontraba bloqueada debido a la falta de capital y de instituciones financieras.

No obstante, a mediados del siglo XIX, surgen diversas iniciativas industriales apoyadas en la legislación que favorecía a la libertad de industria (1836) estableciendo las bases legales para la industrialización o establecía la posibilidad de crear sociedades anónimas mediante acciones (1848). Sin embargo, la falta de buenas comunicaciones por la ausencia de ferrocarril hizo de la industrialización un proceso lento.

Los años que transcurren entre 1844 y 1854 fueron tiempos en los que surgieron negocios buenos y fáciles para la burguesía industrial. Además, se realizaron importantes inversiones en maquinaria industrial. Con todo, el ferrocarril no arrancó con fuerza pues el primero de ello se inauguró en Barcelona en 1848. Además, hubo mucho retraso en la creación de compañías navieras que sustituyeran la navegación a vela por el vapor.

A pesar de que en 1853 solo existían dos centenares de kilómetros de líneas férreas, en 1868 ya se habían tendido todas las grandes líneas nacionales. Las consecuencias fueron inmediatas, pues el ferrocarril facilitaba la existencia de un mercado de trabajo en el que miles de trabajadores y jornaleros agrícolas, se dedicaron al tendido de vías, construcción de puentes y túneles. Por otro lado, se convirtió en una fuente importante de negocios.

La banca española moderna destinada a la emisión de papel moneda, también nació en esos años. El Banco de España se fundó en 1856 con un gobernador nombrado por el gobierno.

Desde comienzos del siglo XIX los obreros se resistieron a incorporar las maquinas fruto del progreso de la tecnología por miedo a perder sus empleos. Se trataba de pequeños movimientos de rebeldía que desembocó en asociaciones de estos. Aunque varios gobiernos las declararan ilegales, solo se consiguió debilitarlas y relegarlas a la clandestinidad.

La revolución francesa de 1848 produjo varios levantamientos armados de obreros en España y, como consecuencia, las asociaciones obreras tuvieron que ser permitidas (1854). Los enfrentamientos entre patronos y obreros solo se calmaron cuando se nombró el gobierno progresista de Espartero. Consecuencia de las disputas, los obreros decidieron hacer una huelga que paralizó las principales áreas industriales. La intervención de Espartero calmó la situación, aunque el movimiento continuó creciendo hasta que en 1865 se pudo convocar un Congreso Obrero en Barcelona, en el que se acordó formar una federación de asociaciones de obreros.

Durante el reinado de Isabel II, la burguesía dueña del poder político y económico, predominó en el plano social. La burguesía se caracterizó por imponer un sistema de valores centrado en el pragmatismo, ya que consideraban la utilidad por encima de cualquier otro valor, apostando por valores como el orden, la comodidad o la seguridad. En cuanto al estrato popular, se diferenciaban dos niveles, el urbano y el rural. El primero, menos numerosos, estaba formado por artesanos, obreros industriales, servidumbre o marinos. Sin embargo, a ambos le afectó el proceso de la proletarización, por el cual, al desaparecer el régimen señorial y aumentar su miseria, tuvieron que trasladarse a las grandes ciudades para trabajar como jornaleros y vivir en condiciones de desarraigo y pobreza.

Durante el sexenio revolucionario (1864-1874), las asociaciones de obreros volvieron a emerger. Se creó el núcleo inicial de la Primera Internacional en España de tendencia marxista y anarquista. Pero la revolución que estalló en París en 1870, produjo detenciones, prohibiciones y los altercados que llevaron el problema obrero a las Cortes por primera vez en la historia de España. Con ello, comenzó de nuevo la represión. Poco a poco la división del movimiento obrero internacional dio la cara en España de tal forma que el groso del movimiento obrero español, a excepción de la Nueva Federación Madrileña, adoptó el anarquismo como base ideológica. Durante la República el movimiento obrero y la Internacional difundieron las consignas anarquistas de abstención al voto y se produjeron motines y ocupaciones de tierras. El golpe de Estado de Pavía en 1874 significó la disolución de la Internacional.

4.2. Las Matemáticas y su enseñanza en España en el siglo XIX

La organización científica y educativa en España hasta los primeros años del siglo XIX era controlada por la Iglesia. Las escuelas de primeras letras, subvencionadas por la propia Iglesia, municipios o instituciones benéficas eclesiásticas, enseñaban a leer, escribir y el catecismo. Los grados previos a la enseñanza universitaria, la segunda enseñanza, se ofrecían en las Escuelas de Latinidad y de Gramática y en las Facultades de Artes y Filosofía. En el último nivel de enseñanza, el universitario, solo tenían cabida tres saberes: los estudios teológicos, que cubrían las necesidades de la Iglesia; los estudios de leyes y cánones, que surtían la estructura burocrática del Estado; y las ciencias médicas (Peset, Garma y Pérez-Garzón, 1978).

El escaso cultivo de las Matemáticas y las ciencias, en general, genera una situación de atraso que comienza a percibirse a mediados del siglo XVII. Las universidades fomentaban una enseñanza memorística de textos antiguos de disciplinas de derecho, teología y filosofía primordialmente, dejando de lado los saberes modernos. Ante ello, los últimos Austrias comienzan a tomar medidas impulsando la creación de instituciones ajenas a la Universidad en forma de sociedades, seminarios y academias (Peralta, 1999).

Aunque sus esfuerzos quedaron en proyectos, algunos fueron aprovechados en el siglo XVIII por los Borbones que comienzan a introducir cambios en el panorama científico: comienzan a aparecer publicaciones de novedades científicas; se disminuye el rigor de la censura; se propician las relaciones con el resto de países europeos, se conceden becas para estudiar fuera de España y se contrata profesorado extranjero; se acomete la reforma de los Colegios Mayores y las Universidades, en las que se producían irregularidades en la provisión de las cátedras; se fundan Academias de Ciencias, el Observatorio Astronómico y Meteorológico de Madrid, la Escuela de Náutica de Barcelona, el Instituto de Gijón, el Real Seminario de Nobles de Madrid, la Real Casa de Caballeros Pajes, los Reales Estudios de San Isidro y la Academia de Artillería de Segovia (Peralta, 1999).

Los gobiernos ilustrados trataron de romper el dominio eclesiástico y el régimen feudal en la enseñanza, impulsando una serie de tareas que consiguieran centralizar, uniformizar y modernizar el aparato escolar. Sin embargo, la política educativa liberal del siglo XIX no es sino el mero reflejo de la lucha de clases, los vaivenes, avances, pactos y retrocesos del proceso revolucionario que se vivió en España. A la hora de planificar su programa escolar y científico, fijan como objetivos primordiales la renovación de la instrucción primaria y el fomento de las ciencias exactas, físicas y naturales, desterradas en España durante los reinados absolutistas (Peset et al., 1978).

4.2.1. La primera enseñanza

El proceso revolucionario vivido en España entre 1808 y 1814 marcó las pautas del Estado liberal con respecto a la institución escolar. La Comisión de Cortes de 1814 redactó un proyecto que incluía la obligatoriedad del establecer escuelas de primeras letras en todos los pueblos de la nación con las premisas: uniformidad de la enseñanza pública en cuanto a los métodos y los libros de texto; gratuidad de la enseñanza pública; libertad de enseñanza ajustada a supervisión estatal; y la división del sistema educativo en tres niveles: primera, segunda y tercera enseñanza. Pero, debido a las políticas absolutistas de Fernando VII, este proyecto no fue completado y aprobado hasta 1821 durante el trienio liberal. En la siguiente década asimismo fueron excluidas de nuevo las ciencias modernas, se cerraron las Universidades y se regularon todos los niveles de enseñanza en un reglamento que devolvía el control de la Iglesia sobre la enseñanza (Peset et al., 1978).

Tras la muerte de Fernando VII, el liberalismo comienza a establecerse en el poder. Así, se extendió la instrucción primaria entre las tropas y se creó una Comisión para desarrollar un Plan general de Instrucción primaria aplicable en todos los pueblos y la creación de una Escuela Normal cuyo propósito sería instruir a los profesores de las provincias (Peset et al., 1978).

El plan de estudios del Duque de Rivas de 1836 divide la instrucción primaria en elemental y superior. La instrucción primaria elemental trataba de dotar a los alumnos de los conocimientos de las cuatro reglas de la Aritmética basados en los textos de Aritmética elemental de Lacroix, Vallejo, Lista y Odriozola. En el nivel superior, se incluyen dos materias con contenido estrictamente matemático, *Mayores nociones de Aritmética* y *Principios de Geometría y sus aplicaciones más usuales*, además de la asignatura de *Dibujo*, que incluía aplicaciones de Geometría (Vea, 1995).

Fue en 1838 cuando se promulga la ley de Instrucción primaria que ofrecía a los ciudadanos un grado de instrucción que trataba de hacerles útiles a la sociedad y a ellos mismos. Para ello, se dividió la instrucción primaria en pública y en privada, cada pueblo con una población mayor a cien vecinos debía sostener una escuela primaria elemental, cada provincia debía mantener una Escuela Normal centralizadas a través de la Escuela Normal de Madrid y cada Ayuntamiento debía pagar el sueldo al maestro, quien recibiría también retribuciones de los alumnos cuyas familias no fueran pobres. Si bien la nueva legislación supone una ruptura ideológica con respecto al régimen anterior, no consigue una escolarización general efectiva y discrimina las escuelas de niñas, cuyo reglamento se pospone para otro momento (Peset et al., 1978).

La ley Moyano proclamada en 1857, diferencia dentro de la primera enseñanza, dos niveles, que se denominan elemental y superior. Para la primera enseñanza elemental se establecen seis campos de estudio: Doctrina Cristiana e Historia, Lectura, Escritura, Gramática, Aritmética y nociones de agricultura, industria y comercio. La primera enseñanza superior amplía las materias anteriores y añade las siguientes: principios de Geometría, Dibujo lineal y Agrimensura; Historia y Geografía; y nociones de física y de Historia general (Vea, 1995).

Por otro lado, se regularizaron los libros de texto para la enseñanza primaria que, a excepción de los obligatorios para Escritura y Lectura, daban libertad de elección dentro de un amplio listado aprobados por el Consejo de Instrucción Pública. Con respecto a las asignaturas matemáticas. Con respecto a las asignaturas de Matemáticas, se aprobaron nueve obras para la enseñanza de la Geometría y setenta y seis obras de Aritmética, cuyo contenido abarcaba la enseñanza de las cuatro reglas y la introducción del sistema métrico decimal que unificaba la gran variedad de unidades de medida usadas en las provincias españolas. Entre todas ellas, fueron las obras del autor José Mariano Vallejo las que se impondrían con respecto a las demás (Peset et al., 1978).

4.2.2. La segunda enseñanza

La segunda enseñanza en España durante el siglo XIX ha sido ampliamente estudiada por Vea (1995), al que seguiremos en el desarrollo de este apartado.

El siglo XIX español vio nacer una nueva etapa educativa con el propósito de cubrir el vacío educativo entre las escuelas primarias y los estudios universitarios. La segunda enseñanza permitió la incorporación de materias proscritas en el antiguo régimen educativo y facilitó la descentralización educativa que desembocó en una mayor difusión del saber, en especial el saber científico.

Aunque en la Universidad tradicional del siglo XVIII no se establecía la obligatoriedad de los Estudios de Latinidad y de Gramática o los de la Facultad de Artes y Filosofía, estos se consideraban básicos para el acceso a las Facultades Mayores de Cánones, Jurisprudencia, Teología y Medicina. Se desarrollaron en algunos centros semioficiales, como el Seminario de Nobles o los Reales Estudios de San Isidro, o en centros privados, como las Reales Sociedades Económicas de Amigos del País.

Sin embargo, para los gobiernos liberales posteriores, la segunda enseñanza se concibió para mejorar el nivel cultural de la nación y no como estudios preparatorios para las Facultades Mayores. Presenta asimismo un esquema del sistema educativo en el que se establecen objetivos, contenidos y alcance social y se convierte en una etapa educativa de formación de profesionales que cubría las necesidades del aparato burocrático burgués, restringida a las clases acomodadas debido al abandono de la gratuidad para la enseñanza secundaria y superior.

El primer plan de estudios que contempla este nivel educativo, aunque no se hace referencia a este, es el Plan Caballero de 1807. En él se gradúan y se uniformizan los estudios universitarios, mediante el establecimiento de cátedras de la Facultad de Filosofía por las cuales se accede a las Facultades Mayores, si bien no pudo implantarse hasta 1814, estuvo vigente hasta 1818 y, tras las medidas adoptadas durante el trienio liberal, desde 1820 hasta 1824. El plan Caballero introduce en los estudios de la facultad de Filosofía, dos asignaturas de contenido exclusivamente matemático, denominadas *Elementos de Aritmética, Álgebra y Geometría* y *Aplicación de el álgebra á la Geometría & c.* para cuyo estudio se establecieron los libros de texto del autor Juan Justo García.

La promulgación del Reglamento de Instrucción Pública aprobado en las Cortes en 1821, estableció unos estudios intermedios rigurosos, amplios y formativos, en los cuales se reducían las cátedras de latinidad y humanidades y se incrementaban las de Ciencias por la necesidad de estas para acceder a los estudios superiores. Aunque el desarrollo del reglamento con respecto a la segunda enseñanza es escueto y poco explícito, en general se fomenta el estudio de las Matemáticas y se plantea el establecimiento de una Escuela

Politécnica en Madrid en la que se enseñarían materias como la Geometría descriptiva, Mecánica o Elementos de arquitectura.

El retorno del absolutismo supuso la derogación de la legislación aprobada durante el trienio liberal y una regulación educativa regresiva hacia las Ciencias, en especial hacia las Matemáticas, que mantiene los criterios del plan Caballero de 1807, pero presenta un esquema más completo, ordenado y moderno que este. El plan de 1824 exige que antes del comienzo de los estudios en cualquiera de las cuatro Facultades Mayores se obtenga el grado de Bachiller en Filosofía. El currículo para estos tres años de Filosofía incluye una única asignatura de Matemáticas, que se impartía en el primer curso denominada *Elementos de Matemáticas*. Con respecto a los libros de texto, el plan señala el estudio de todas las materias mediante textos escritos en latín.

La implantación de los estudios de segunda enseñanza, se produce en tres etapas: de impulso, con la promulgación del plan de estudios del Duque de Rivas (1836); asentamiento, coincidiendo con el plan Pidal (1845); y consolidación oficial, con el plan Moyano (1857).

El plan elaborado por el Duque de Rivas en 1836 se caracteriza por incluir las líneas ideológicas de los liberales, incluso desde una perspectiva moderada. Este aborda la gratuidad de la enseñanza en los niveles educativos que alcancen a un mayor número de personas y que se aplique en función de las necesidades de quien vaya a recibirla. También establece libertad al profesorado con respecto a los libros de texto para la enseñanza de su asignatura; divide la instrucción secundaria en elemental y superior; e incluye, por primera vez en esta etapa, nuevos y modernos contenidos, entre los cuales aparecen asignaturas matemáticas.

Dentro del currículum del nivel elemental, sin mencionar su ordenación y mediante una vaga denominación de los contenidos, se incluye la asignatura *Elementos de Matemáticas*, que incluye habitualmente Aritmética, Álgebra, Geometría y Trigonometría. Teniendo en cuenta las reediciones publicadas de los textos bajo este título de Lacroix, Vallejo, Lista y Odriozola en el periodo comprendido entre 1836 y 1845 y no existiendo la obligatoriedad de uso de ningún libro de texto en este nivel, es claro que fueron seguidos por parte del profesorado.

El plan de estudios de 1845, promulgado bajo el ministerio de Pedro José Pidal, divide la enseñanza secundaria en elemental y de ampliación, esta última dividida a su vez en dos secciones, letras y ciencias. La enseñanza elemental se amplía a cinco años en el que se vislumbra un predominio de las lenguas, latín y castellano; se fomentan los estudios memorísticos; y se protegen especialmente los contenidos no científicos, eliminando particularmente, contenidos matemáticos. Destaca en este, la modificación del criterio sobre los libros de texto y se establece que el Consejo de Instrucción Pública apruebe y revise cada tres años, una lista de a lo sumo seis obras que sirvan como libros de texto para cada asignatura, de entre las cuales el profesor elegirá la que considere más conveniente. Establece, asimismo, que para la obtención del grado de bachiller en Filosofía, se necesitaba aprobar los estudios de segunda enseñanza elemental; que el grado de bachiller en Filosofía era requisito indispensable para el ingreso en todas las carreras universitarias; y que para la obtención de la titulación de Licenciado en Filosofía, debían cursarse los estudios de ampliación de ambas secciones, la licenciatura en ciencias y la licenciatura en letras.

Con respecto a los contenidos matemáticos integrados en el currículum, en la segunda enseñanza elemental se incluyen dos asignaturas de Matemáticas a lo largo de los cinco años que tiene de duración. En el primer año se imparte la asignatura *Ejercicios de Cálculo aritmético. Nociones elementales de geometría. Elementos de Geografía*, que tiene por objetivo realizar un repaso de los diferentes contenidos matemáticos de la enseñanza primaria. En el cuarto año se imparte la otra asignatura, *Complemento de la Aritmética. Álgebra hasta las ecuaciones de segundo grado inclusive. Geometría, Trigonometría rectilínea. Geometría práctica* (parte de Geometría y de Trigonometría aplicada a las mediciones topográficas). Dentro de la segunda enseñanza de ampliación, en la sección de ciencias, se incluye una asignatura, *Matemáticas sublimes*, de la que no se especifica su contenido y cuyo estudio se debía cursar al menos en dos años.

A pesar de la extensión de la legislación, los contenidos que debían impartirse en la segunda enseñanza no se concretan en los reglamentos y se establece que deben desarrollarse en los libros de texto que apruebe el Gobierno. Durante el periodo comprendido entre 1845-1857 se aprobaron con puntualidad las listas de libros de texto de segunda enseñanza al comienzo de algunos cursos. Entre los textos que fueron aprobados en las listas, destacan los de Lacroix, Vallejo, Odriozola y Juan Cortázar para las asignaturas de Aritmética, Álgebra, Geometría, Trigonometría y Topografía.

La Ley General de Instrucción Pública elaborada bajo el gobierno del ministro Moyano en 1857 recoge las principales directrices del nuevo sistema educativo. En ella se establece la división de la instrucción en tres periodos de enseñanza, primaria, secundaria y superior; la obligatoriedad de la primera enseñanza y su gratuidad para los alumnos cuyas familias tuvieran escasos recursos económicos; y el uso de un mismo libro de texto para todos los centros educativos. La segunda enseñanza queda dividida asimismo en dos partes: los *Estudios Generales*, que a su vez se dividen en dos periodos de dos y cuatro años, respectivamente, y los *Estudios de aplicación a las profesiones industriales*. Un aspecto destacable de la ley es el establecimiento de las condiciones para poder acceder a cada uno de los cursos: para comenzar los Estudios Generales, se pedía haber cumplido los nueve años y superar un examen de las materias de la primera enseñanza completa; para comenzar los de aplicación, se pedía tener diez años y superar un examen de las materias de la primera enseñanza superior; y se requería un examen de reválida para pasar del primero al segundo de los periodos de los estudios generales.

Con respecto a los contenidos matemáticos, la ley indica que los Estudios Generales del primer periodo incluyan la materia Aritmética, pues se pretendía repasar los contenidos de la primera enseñanza elemental. En los cuatro años del segundo periodo se incluyen los contenidos Elementos de Aritmética, Álgebra y Geometría. Dentro de los Estudios de aplicación se encuentra asimismo la asignatura de Aritmética mercantil y se indica la posibilidad de elaborar otras de aplicación inmediata y sin que precisen más preparación científica que la dada en la primera enseñanza superior.

En cuanto a los libros de texto, las listas publicadas por el gobierno cada tres años, con a lo sumo tres obras por cada una de las asignaturas de la segunda enseñanza, debían seguirse obligatoriamente en todos los estudios. Los libros de texto aprobados en este periodo para las asignaturas de Aritmética, Álgebra, Geometría, Trigonometría y Topografía, pertenecían entre otros a los autores Juan Cortázar, Acisclo Fernández Vallín y Bustillo o Joaquín María Fernández y Cardín.

4.2.3. Las Universidades y Escuelas Técnicas

El interés por el cultivo de las ciencias surgido a finales del siglo XVIII, se vio afectado por la guerra con los franceses, que influyeron asimismo a los aspectos sociales, económicos, políticos y culturales del país. Durante la guerra y el reinado de José I de Bonaparte algunos científicos españoles colaboraron con el gobierno y otros se exiliaron en el extranjero o se enfrentaron a los franceses. Por ello podemos hablar de una actividad académica muy reducida, no obstante, algunos impartieron docencia en alguna de las instituciones creadas en el último tercio del siglo XVIII (Garma, 1988).

Aquellos que tuvieron medios para alcanzar y mantener una cultura científica, entre ellos militares o marinos como Ulloa, Ciscar o Mendoza, trabajaron de forma aislada pues los fracasos políticos y los vaivenes de la revolución burguesa, impidieron que se unieran en sociedades para desarrollar un saber matemático de elevado nivel (Peset et al., 1978).

El primer plan de estudios que tiene en cuenta la actividad científica es el Plan general de Instrucción Pública del Duque de Rivas tras la muerte de Fernando VII. En este plan la enseñanza universitaria se dividía en Facultades y Escuelas Especiales. El conjunto de facultades estaba formado por las de Jurisprudencia, Teología, Medicina y Cirugía, Farmacia y Veterinaria; las Escuelas Especiales eran las de Caminos, Canales y Puertos, Minas, Agricultura, Comercio, Bellas Artes y Artes y Oficios. El plan no fue aprobado por las Cortes, lo que supuso una vuelta al régimen universitario anterior, en el que únicamente se estudiaba la asignatura de Matemáticas en uno de sus cursos (Peset et al., 1978).

No obstante, es a partir de entonces cuando se empiezan a crear las Escuelas de Ingenieros: la Escuela de Ingeniero de Montes (1834); Caminos, Canales y Puertos (1834), Minas (1835). Se fundan asimismo las Escuelas Normales (1846), la Real Academia de Ciencias, Físicas y Naturales de Madrid (1847), las Escuelas de Ingenieros Industriales (1850) y de Agrónomos (1855) (Peralta, 1999).

Entre 1836 y 1845, tras varios intentos frustrados, se organizan los estudios de la Universidad Central, que no recibe ese nombre hasta 1850, gracias al plan del ministro Pidal y a su director Gil de Zárate en 1845. Así, tras terminar la segunda enseñanza, en el que los estudiantes podían licenciarse también en Ciencias, podían continuar sus estudios en las Facultades Mayores tradicionales. Aunque las Matemáticas comienzan a tenerse más en cuenta en estos planes, serán realmente en las Escuelas Especiales donde tengan más cabida, pues fueron conscientes de la necesidad de formar ingenieros de calidad que supieran aplicar los conocimientos científicos a la industria y la construcción (Peset et al., 1978).

Esta ley marca el comienzo de la estabilización de los estudios secundarios y superiores, que hace posible la aparición de nuevos científicos y técnicos preparados para aumentar el conocimiento científico y la productividad del país (Garma 1988).

La promulgación del plan de estudios de 1857 de Moyano supuso asimismo la aparición de la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales y con ella, la posibilidad de académicos y científicos para agruparse, investigar y difundir sus conocimientos (Peset et al., 1978). No obstante, no se alcanzaron los objetivos pretendidos pues la escasez de revistas científicas y el bajo presupuesto dedicado a la enseñanza, provocó que las publicaciones de los profesores universitarios de redujeran a libros de texto y conferencias pronunciadas en actos académicos (Peralta, 1999).

De este modo, la enseñanza de las Matemáticas en la Facultad de Ciencias insistía en Álgebra, Geometría y Trigonometría; Geometría analítica, Geometría descriptiva y sus aplicaciones; y Cálculo diferencial e integral. Enumeraba asimismo las asignaturas de las Escuelas Especiales para los estudios de Caminos, Canales y Puertos, Minas, Montes, Agrónomos, Industriales y Arquitectura (Peset et al., 1978).

Por otro lado, la ley Moyano, introduce modificaciones en la enseñanza universitaria como la implantación de enseñanzas prácticas y lecciones magistrales por parte del profesorado, que buscan un aprendizaje memorístico del manual redactado por el propio profesor o traducido de algún autor contemporáneo. Durante el desarrollo de las clases se podían formular preguntas por parte del Catedrático a los alumnos y viceversa. Y se establece la evaluación a través de exámenes, por medio de preguntas escritas o de forma oral; por profesores o tribunales; o por asignaturas o cursos completos (Peralta, 1999; Peset, 1988).

4.3. Juan Cortázar Abasolo[1] (1809-1873)

Nació en Bilbao el 8 de junio[2] de 1809, con lo que sus primeros años de vida se dieron durante una época de continuo cambio político, provocado por la expulsión y llegada de nuevo al poder, de Fernando VII. Teniendo en cuenta la baja tasa de escolarización de la época, podemos considerar a Cortázar un individuo afortunado por tener la oportunidad de estudiar latín en el convento de los Franciscanos de Bilbao, desde los 10 hasta los 13 años, y después realizar los estudios de Humanidades y los idiomas de francés e inglés en el Colegio de Santiago hasta tener cumplidos los 18 años de edad (Irueste, 1912).

Figura 4-1. Juan Cortázar Abasolo (Irueste, 1912)

Entre los años 1827 y 1834, ejerció como docente en el mismo colegio en el que estudió, aprobando su examen para maestro de instrucción primaria a los 22 años de edad (Picado, 2012).

Aunque en 1834 ingresó en la Escuela de Ingenieros de Caminos, no le fue posible comenzar sus estudios, ya que la ciudad fue azotada por una epidemia de cólera y las clases fueron suspendidas. Este acontecimiento supuso un punto de inflexión tanto en su formación como en la historia de la ingeniería en España. La mala fortuna de la ciudad sirvió para que los alumnos matriculados en la Escuela de Ingenieros del año 1834 se beneficiasen de las políticas de cambio de Isabel II, quién reabrió las Universidades que su padre había cerrado, a1 ser becados para estudiar en la Escuela Central de Artes y Manufacturas de París desde 1834 hasta 1837. Estos jóvenes españoles becados al volver a España se convirtieron en los hombres que diseñaron los planes de estudio de Ingeniería Industrial en 1850 (Lusa, 2003).

Ya en París, Cortázar descubrió los métodos rigurosos de enseñanza de las matemáticas avanzadas de una de las instituciones más importantes de la capital francesa, la Escuela Politécnica de Ponts et Chaussées. De hecho, pidió su traslado a esta a la Dirección General de Instrucción Pública, quién se lo denegó por considerar sus razones de poco peso, ya que el objetivo de estudiar en la Escuela de Ingenieros de París consistía en difundir en España a su vuelta las aplicaciones útiles de las ciencias físico-químicas, y no los conocimientos teóricos de las ciencias matemáticas (Moya, 2004). Aun así, estudió cuatro cursos en tres años y obtuvo el título de Ingeniero, con premio del correspondiente diploma, con excelentes calificaciones (Irueste, 1912).

Escribió un tratado completo de trigonometría en 1838, mientras vivía aún en París, que nunca llegó a publicarse, pero gracias al cual dedujo una demostración elegante y original de las analogías de Neper, que fue publicada en el periódico francés titulado *Nouvelles annales de mathématiques* en 1847 (Cortázar, 1847; 1854).

Aprovechando su estancia en el extranjero Cortázar vivió durante un breve periodo de tiempo en Inglaterra. Y, tras regresar a España, es nombrado Catedrático de Matemáticas elementales del Instituto de Noviciado, actualmente Instituto del Cardenal Cisneros de Madrid, en 1837 para dar respuesta a la incorporación de estudios de segunda enseñanza en la Facultad de Filosofía y así dividir estos estudios en elementales y superiores de Filosofía. Cortázar comienza impartiendo las Matemáticas del segundo año en el Instituto de Noviciado, pero tras la implantación del plan Pidal de 1845, pasa a impartir las asignaturas de Álgebra, Geometría y Trigonometría Analítica del cuarto curso y Matemáticas sublimes correspondientes a los estudios de Ampliación de Ciencias. Debido a los cambios introducidos por el plan de estudios de 1847, la asignatura de Matemáticas denominada Elementos de Matemáticas se distribuye en dos cursos, ambos impartidos por Cortázar. Supo además compatibilizar su docencia con la dirección del Colegio Politécnico, del Colegio Marsanau y de una Academia de Matemáticas a la que bautizó con su nombre (Rodríguez, 2009).

Se licencia en Ciencias Físico-Matemáticas en 1847, y, en 1850 es nombrado Catedrático de Álgebra superior y Geometría analítica de la Facultad de Filosofía, en su sección de Ciencias de la Universidad Central, en la que más tarde ocupará el título de decano (Rodríguez, 2009). Como afirman Peset et al. (1978), Gil de Zárate realizó un escalafón con el número de orden, nombre, Universidad, facultad y asignaturas que impartían los catedráticos de la Universidad española. Cortázar aparece como uno de los dos catedráticos de matemáticas, junto a Francisco Travesedo, en 1851 y, tras la jubilación de éste, en el nuevo escalafón del 1859 aparece solo Cortázar.

La influencia de los ingenieros españoles en la historia de las ciencias durante el siglo XIX es evidente no solo en lo relativo a los avances científicos de las disciplinas físico-químicas y matemáticas, sino por sus aportaciones al ámbito pedagógico. Ingenieros como Cortázar o José Echegaray y Eizaguirre, comenzaron a dar clase en institutos de segunda enseñanza y a escribir libros de texto dando un impulso a la enseñanza de las matemáticas en España (Ortiz, 1996; Sánchez, 1999).

En diciembre de 1848 se crea la Escuela Preparatoria para las carreras de Caminos y Minas a la cual se accedía mediante un examen de acceso en el que se les daba especial importancia a las matemáticas. Prueba de ello es que, junto a Francisco Travesedo y Alejandro Bengoechea, Cortázar formó parte del Tribunal nombrado para realizar el examen de ingreso, entre cuyos aspirantes se encontraba el matemático, Ingeniero, presidente del Ateneo y de la Real Academia de las Ciencias, José Echegaray (Sánchez, 2004).

Cortázar fue docente de Álgebra superior y Geometría analítica en la Facultad de Filosofía hasta el año 1857 en el que la Ley Moyano separó los estudios de ciencias de ésta y organizó la Universidad de Ciencias en tres secciones: físico-matemáticas, químicas y naturales. En las dos primeras impartía Geometría analítica, y en la sección de naturales, la asignatura de Álgebra (Universidad de Madrid, 1856; 1857).

Ese mismo año fue elegido miembro de la Real Academia de Ciencias Exactas, aunque debido a problemas de salud no llegó a ser miembro activo ni a leer su discurso de ingreso, sin embargo, continuó ejerciendo como profesor hasta su fallecimiento. Durante los cursos 1860-1861 y 1861-1862, fue profesor de su discípulo José Antonio Irueste, a quien confió la corrección de las nuevas ediciones de sus tratados y al cual propuso como sustituto personal de su cátedra, gracias a la ley aprobada por el Gobierno provisional en 1868 (Irueste, 1912).

El humanismo y su entrega por la enseñanza, así como, su deseo de impartir una formación matemáticas rigurosa y acorde con las necesidades a sus estudiantes, se hace evidente en los testimonios de éstos. La faceta que más resaltan sus alumnos es que se trataba de un bondadoso y tolerante profesor y mentor, convirtiéndose éstos en ilustres profesores de matemáticas que contribuyeron a la divulgación de su obra. Ejemplos son Hipólito Díaz Pardo y Botaz, el cual indicaba las obras de su profesor Cortázar como textos de referencia en el Instituto Provincial de Logroño (Vea, 1998) o el mismo Irueste quien utiliza sus obras como libros de texto hasta el año 1876 y dedicó a su maestro la publicación de su libro en una emotiva nota en el que se refiere a él como “eminente matemático, insigne profesor y probo ciudadano” (Girón y Girón, 2010, p. 355).

En el XXXIX aniversario de la muerte de su maestro, a Irueste le es encomendada la tarea de escribir una semblanza de su vida y un análisis de su obra en la *Revista de la Sociedad Matemática Española.* En ella, compara intelectual y moralmente a Cortázar con el destacado filósofo y matemático cordobés D. José Rey y Heredia y le elogia con numerosos calificativos como altruista, sabio, preclaro maestro, de natural bondad, varón ejemplar o de bondadosa tolerancia (Irueste, 1912).

A Cortázar se le conocía también como un generoso patriota el cual aportó importantes cantidades de dinero para el mantenimiento de los militares que lucharon en julio de 1854 en Madrid (Peset, Garma y Pérez-Garzón, 1978), y aunque consideraba que los continuos cambios políticos en España frenaban el progreso de su país, aceptaba con agrado la creación de las nuevas instituciones con la esperanza de que fomentaran el crecimiento de su nación (Irueste, 1912).

Cortázar muere en Madrid el 12 de abril de 1873 a los 63 años de edad a consecuencia de un tumor. Gumersindo Vicuña, en su discurso del acto de apertura del curso académico 1875-1876, en el que dedica unas palabras a profesores recientemente fallecidos, como Valledor, Bengoechea, Presas, Elizalde, Rey Heredia y, por supuesto Cortázar, describe a nuestro autor como “el matemático Cortázar, carácter de oro con corteza de barro, espíritu original, autor metódico y claro” (Vicuña, 1875, p. 31)

5. RESULTADOS

5.1. Obra: *Tratado de Aritmética*

5.1.1. Caracterización de la obra

La obra que tuvo mayor acogida en el sistema educativo español fue el *Tratado de Aritmética* (CE1). Fue publicada por primera vez en 1846, ese mismo año apareció en las listas de libros de texto oficiales para la enseñanza secundaria (Gaceta de Madrid de 8 de septiembre de 1846) convirtiéndose en la primera de las obras de Cortázar en alcanzar esa meta y llegó a tener una 45ª edición en 1923 (CO2 y CO3). Las portadas de las diferentes ediciones rezan que la obra estaba señalada como libro de texto en Universidades, Institutos y Escuelas Profesionales, además de usarse en la mayoría de seminarios y escuelas normales (CO5).

En su análisis de las últimas ediciones de la obra, Irueste (1912) destaca la formalidad de la demostración de los teoremas correspondientes a las propiedades de invariabilidad de las fracciones, la decisión de eliminar del texto las razones y proporciones aritméticas, la estrategia didáctica en el método de extracción de las raíces cuadradas y cúbicas y el original método para difundir en el Reino las nuevas medidas, a través de equivalencias aproximadas (CO5).

Vea (1995) analiza los prólogos de las ediciones primera y séptima y saca a relucir las principales diferencias con respecto a otros autores como Odriozola o Bourdon. La primera de ellas es la intención de Cortázar de separar el estudio de la aritmética de la del álgebra, además de buscar una obra sencilla de asimilar eligiendo proposiciones y resultados más sencillos, aunque suficientes para el estudio de la aritmética (CO5).

Asimismo, destaca que Cortázar considera no necesaria la inclusión de la teoría de las razones aritméticas, además de tratar livianamente las cantidades inconmensurables y obviando los números negativos. Considera también que los alumnos de enseñanza secundaria poseían un bajo nivel matemático, a la vista de los apartados marcados con un asterisco que Cortázar recomendaba obviar para este nivel de estudios (CO5).

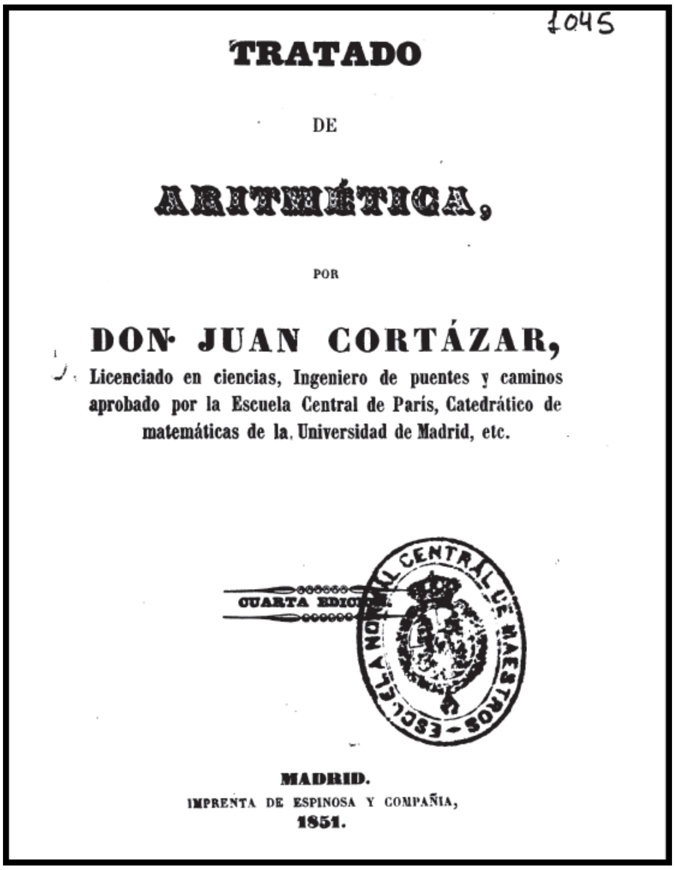
Con respecto a los contenidos, Vea destaca la ampliación de los apartados de quebrados y cantidades inconmensurables de la séptima edición con respecto a la primera y una reducción del apartado sobre la extracción de raíces de cantidades. Además, considera contradictorio que Cortázar introduzca el Sistema Métrico Decimal como un apéndice del tratado, cuando se venía priorizando su estudio (CO5).

Comparando la obra de Cortázar con la equivalente de Bourdon, observa que ambas poseen los mismos contenidos, pero diferente secuenciación; que la seguida por Cortázar es más coherente pero la de Bourdon más pedagógica y observa un avance en la nomenclatura de Cortázar frente a la Bourdon (CO5).

5.1.2. Caracterización de las ediciones

5.1.2.1. Periodo 2 (1845-1857): Cuarta edición

Es este caso se ha analizado la cuarta edición, la más antigua a la que se tiene acceso. La cuarta edición fue impresa en Madrid en el año 1851 en la imprenta de Espinosa y Cía. Analizaremos un ejemplar que forma parte de las bibliotecas de las Universidades Complutense y Politécnica de Madrid y que ha llegado hasta nosotros a través de repositorios digitales (CE2, CE3 y CE4).



1045

TRATADO

DE

ARITMÉTICA,

POR

DON JUAN CORTÁZAR,

Licenciado en ciencias, Ingeniero de puentes y caminos aprobado por la Escuela Central de París, Catedrático de matemáticas de la Universidad de Madrid, etc.

CUARTA EDICION.

ESCUELA NORMAL CENTRAL DE MAESTROS

MADRID.

IMPRENTA DE ESPINOSA Y COMPAÑIA,

1851.

Figura 5-1. Portada del *Tratado de Aritmética* (Cortázar, 1851)

Está formado por un solo tomo de 211 páginas, organizado en dos partes. La primera de ellas está dividida en cinco libros y está dedicada al cálculo de los números, en particular de los números enteros, quebrados, raíces cuadradas y cubicas y proporciones. La segunda parte se compone de dos libros que tratan de operaciones y problemas de aplicación de la aritmética, en la que encontramos ejercicios y problemas, tanto teóricos como de aplicación a la vida diaria. Por últimos, se incluye un anexo titulado Complemento de la Aritmética, dedicado al estudio de los diferentes sistemas de numeración, las nuevas medidas y las cantidades inconmensurables. A su vez, los libros están divididos en capítulos, 33 en total (CE5).

La primera parte está escrita en lenguaje formal y, se encuentra estructurada en definiciones, teoremas, lemas, corolarios, notas y multitud de ejemplos, los cuales facilitan la comprensión de los razonamientos teóricos por parte del lector. La segunda parte contiene ejercicios y problemas, resueltos de manera detallada, en numerosas tipologías y situaciones (CE5).

Tabla 5-1. *Índice del Tratado de Aritmética de Juan Cortázar, 1851*

LIBRO 1º - Operaciones fundamentales Nociones preliminares – Reducción de un número complejo a incomplejo, y al contrario - Operaciones con los números concretos: adición de los números concretos, sustracción de los números concretos, multiplicación de los números concretos, método de las partes alícuotas en la multiplicación de números concretos y división de los números concretos.	Págs. 141-158
LIBRO 2º - Problemas que pueden resolverse por una o más proporciones simples Nociones preliminares – Problemas que dependen de un asola proporción simple, o sean reglas de tres – Problemas que dependen de dos o más proporciones simples, o regla de tres compuesta – Regla de compañía – Interés – Descuento – Regla conjunta – Regla de aligación.	Págs. 159-189
Complemento de la Aritmética Teoría de los diferentes sistemas de numeración – Operaciones abreviadas: multiplicación de números enteros, reducir centésimas de real a maravedises, método abreviado para la multiplicación de las cantidades decimales y división de números enteros – Nuevas medidas y pesas legales – Cantidades inconmensurables.	Págs. 190-211

No se encuentran referencias a otros autores en el texto. Sin embargo, hallamos referencias a su *Memoria del cálculo de interés* (CE7).

Estructura conceptual

Las nociones preliminares de la primera parte del *Tratado de Aritmética* incluyen la definición de número entero, unidad y número quebrado. Así, “Se llama número entero la reunión de varias cosas iguales” (p. 1) (CCA1), “Se llama unidad cada una de las cosas iguales que componen un número entero” (p. 1) (CCA1) y “Si una unidad se divide en partes iguales, una de estas partes, ó la reunión de varias de estas partes, se llama número quebrado” (p. 1) (CCA1). Asimismo, se define cantidad como “todo lo que se puede representar por números exacta ó aproximadamente, como el peso de los cuerpos, el tiempo, el dinero, las distancias, etc.” (p. 1) (CCA1). Por último, se define la Aritmética como “la ciencia que tiene por objetos resolver los problemas de la composición y descomposición de los números” (p. 1) (CCA1).

Se incluyen también una lista de signos “que se usan en la aritmética para simplificar los razonamientos” (Figura 5-2) (CCA1).

+	significa. . . .	mas.
—	. . . .	menos.
× ó.	. . . .	multiplicado por.
:	. . . .	dividido por, ó partido por.
=	. . . .	igual á.
<	. . . .	menor que.
>	. . . .	mayor que.

Figura 5-2. Signos usados en el *Tratado de Aritmética* (Cortázar, 1851, p. 1)

Continúa explicando y aportando ejemplos sobre la numeración verbal y escrita de los números enteros, que define como “la parte de la aritmética que tiene por objeto espresar todos los números enteros con pocas palabras, y escribirlos con un número corto de figuras” (p. 2). Dedica una nota al final en la que explica que el sistema de numeración con el que usualmente se trabaja se llama sistema de numeración decimal y que es debido a que “cada cifra representa unidades diez veces mayores que la cifra inmediata a su derecha” (p. 6) pero que hay tantos sistemas de numeración como se quieran.

A continuación, detalla con varios ejemplos las cuatro operaciones fundamentales de los números enteros. Con respecto a la suma, indica los nombres de los términos de una suma y dice que su objeto es “reunir varios números en uno solo” (p. 6) (CCA2), por tanto, el resultado “contiene todas las unidades, todas las decenas, todas las centenas, etc. de los sumandos; y por lo tanto es la suma pedida” (p. 7) (Figura 5-3) (CCA2).

Ejemplo. **Hallar la suma de los números 49839, 287 321 y 4502.**

Operacion.

	49839
Sumandos. . . .	287
	321
	4502
Suma.	54949

Figura 5-3. Ejemplo de adición en el *Tratado de Aritmética* (Cortázar, 1851, p. 7)

Define la sustracción como la operación contraria de la adición, indica los nombres de los términos de una resta y relaciona el minuendo como “la suma del sustraendo y el resto” (p. 8) (Figura 5-4) (CCA2).

Ejemplos.

1.° Hallar la diferencia de los números 767543 y 538901.

Operacion.

767543	*Minuendo.*
538901	*Sustraendo.*
228642	*Resto ó diferencia.*

Figura 5-4. Ejemplo de sustracción en el *Tratado de Aritmética* (Cortázar, 1851, p. 8)

Seguidamente define la multiplicación entre dos números como “un tercer número que sea respecto del primero, lo que el segundo es respecto a la unidad” (p. 9), indica los nombres de los términos de toda multiplicación y distingue tres casos a la hora de realizar una multiplicación: multiplicar dos números de una cifra cada uno, multiplicar un número de varias cifras por uno de una cifra y multiplicar dos números de varias cifras (Figura 5-5) (CCA2).

18. 3.er *caso.* Multiplicar 3246 por 4908.

Disposicion de esta operacion.

3246	*Multiplicando.*
4908	*Multiplicador.*
25968	*Productos parciales.*
2921400	
12984000	
15931368	*Producto total.*

Figura 5-5. Ejemplo de multiplicación en el *Tratado de Aritmética* (Cortázar, 1851, p. 13)

Por último define la división como "una operación inversa de la multiplicación: su objeto es, dado un producto de dos factores y uno de estos factores, hallar el otro factor" (p. 16) (CCA2), indica los nombres de cada una de las partes de una división, distingue entre división exacta e inexacta y explica el método para dividir dos números distinguiendo entre tres casos: cuando el cociente y el divisor tienen una cifra pero el dividiendo tiene una o dos, cuando el cociente tiene una cifra pero el dividendo y el divisor tienen varias y cuando el cociente tiene varias cifras (Figura 5-6) (CCA2).

Sea el dividendo 5798326 y el divisor 674.

Disposicion.

5798.3 2 6	674
406 3.2 6	8602
1 9 2.6	
5 7 8	

Figura 5-6. Ejemplo de división en el *Tratado de Aritmética* (Cortázar, 1851, p. 22)

Antes de finalizar el libro primero, dedica un capítulo a la descripción de las pruebas de las cuatro operaciones fundamentales, "cuyo objeto es asegurarse de la exactitud de la primera (operación)" (p. 26) (CCA2).

El libro segundo está dedicado a las propiedades de los números con respecto a la multiplicación. Para ello observa que:

> con objeto de simplificar los razonamientos, haremos á veces uso de letras para representar números cualesquiera. Para indicar que los números representados por estas letras están multiplicados, no hay mas que juntar las letras sin interposición de ningun signo. Así, *abc* quiere decir que el número *a* se multiplique por el número *b*, y el producto de ambos por *c*. (p. 27)

Después, comienza por esclarecer la jerarquía en las operaciones combinadas y enuncia y demuestra mediante casos particulares las siguientes propiedades:

- “Para multiplicar una suma indicada por un número, se multiplican todos los sumandos por dicho número, y se suman todos los productos parciales” (p. 29).
- “El producto de varios factores no se altera, aunque se mude el órden de los factores” (p. 30).

Tras definir la potencia de cierto grado de un número entero como el “producto que resulta tomando al número por factor tantas veces como unidades tiene dicho grado” (p. 32), nos indica su notación “poniendo en la parte derecha y superior del número otro número igual á las veces que el primero está tomado por factor” (p. 32). Por último, muestra cómo se leen las potencias.

Los siguientes capítulos están dedicados a la divisibilidad de los números enteros. Se enuncian las definiciones de número par, número impar, divisor, múltiplo, número primo, máximo común divisor y mínimo común múltiplo. Para simplificar las demostraciones, denota a los múltiplos de un número tal y como se indica en la Figura 5-7 (CCA3). A continuación, se enuncian y demuestran las reglas de divisibilidad entre 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 11, 100 y 1000, la descomposición de un número en factores simples y el método para calcular el máximo común divisor de varios números, los divisores de un número y el mínimo común múltiplo (CCA3).

$$70000 = m.\ \text{de}\ 9 + 7\ (a) \qquad\qquad m.\ c.\ d.\ \text{de}\ A\ \text{y}\ B$$

Figura 5-7. Notaciones de conceptos de divisibilidad en el *Tratado de Aritmética* (Cortázar, 1851)

El libro tercero, dedicado a los quebrados, es abordado desde la división en partes iguales de la unidad. Así, “se llama fracción ó quebrado una parte de la unidad ó la reunión de varias partes iguales de la unidad” (p. 54) (CCA4). Se indica su notación, cómo deben escribirse y leerse las fracciones, así como los nombres de cada una de las partes de ésta. Añade las definiciones de quebrado propio, quebrado impropio, número mixto y su notación (Figura 5-8) (CCA4).

$$5+\frac{4}{9},\ \text{ó}\ 5\frac{4}{9}.$$

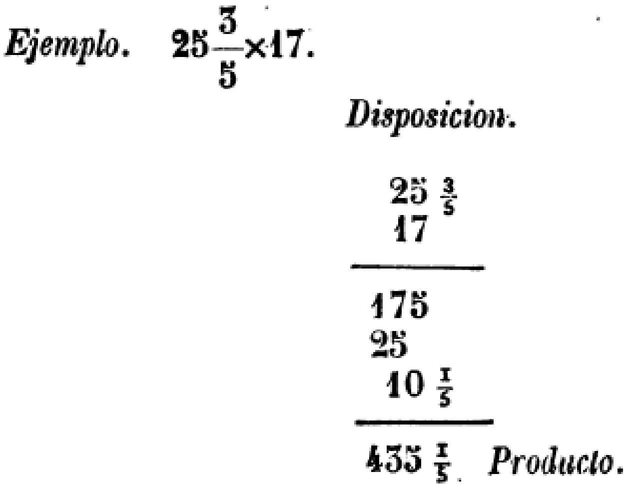
Figura 5-8. Notación para los números mixtos en el *Tratado de Aritmética* (Cortázar, 1851, p. 56)

Las propiedades que los quebrados tienen con respecto al producto le llevan al principio para reducir quebrados, a la equivalencia que existe entre ambos quebrados y a la reducción a un denominador común de varios quebrados.

A continuación, se detallan y aportan ejemplos de las cuatro operaciones fundamentales de los números quebrados. Destaca que “las definiciones de la adicion, sustraccion, multiplicacion y division que hemos dado, al tratar de estas operaciones con los números enteros, convienen á las mismas operaciones con todos los números” (p. 66) (CCA4), por tanto, procede a aplicar los métodos correspondientes a cada operación.

Tras explicar cómo se suman y se restan quebrados en el caso en el que tengan el mismo denominador y en el caso en el que tengan distinto, describe el método para sumar y restar números mixtos. En el caso de la suma, “se suman los quebrados, y si de esta suma resultan algunas unidades, se guardan para sumarlas con los enteros” (p. 67) (CCA4). Análogamente para la sustracción.

Distingue tres casos a la hora de multiplicar y dividir quebrados: el de un quebrado por un entero, el de dos quebrados y el de números mixtos. En el caso del producto de dos números mixtos, reduce ambos a quebrados y después multiplica. Sin embargo, en el caso del producto de un número entero por un quebrado, “será preferible multiplicar las dos partes del mixto por el entero, y sumar en seguida los dos productos parciales” (p. 71) (Figura 5-9) (CCA4). Análogamente para la división.



Ejemplo. $25\frac{3}{5} \times 17.$

Disposicion.

$$\begin{array}{l} 25\ \frac{3}{5} \\ 17 \\ \hline 175 \\ 25 \\ 10\ \frac{1}{5} \\ \hline 435\ \frac{1}{5} \end{array}$$

Producto.

Figura 5-9. Multiplicación de un número entero por un número mixto en el *Tratado de Aritmética* (Cortázar, 1851, p. 71)

Continúa describiendo la operación quebrado de quebrado, es decir, “una parte de un quebrado, ó la reunion de varias partes iguales de un quebrado” (p. 75) (CCA4), enuncia y demuestra las propiedades de los quebrados con respecto al producto y las potencias de los números fraccionarios de manera análoga a como lo hizo con los números enteros.

Antes de terminar el libro tercero, define los quebrados decimales como aquellos que “tienen por denominador la unidad seguida de uno ó mas ceros” (p. 82) (CCA4), indica cómo se leen y que “cualquier fraccion decimal puede escribirse sin denominador, escribiendo el numerador y separando de la derecha con una coma tantas cifras como ceros tiene el denominador” (p. 83) (CCA4).

Posteriormente se describen las operaciones fundamentales de las cantidades decimales. Distingue tres casos en la multiplicación: cuando se multiplica una cantidad decimal por la unidad seguida de uno o más ceros, cuando se multiplica una cantidad decimal por una entera y cuando se multiplican dos cantidades decimales (Figura 5-10) (CCA4). Análogamente para el caso de la división.

Ejemplos.

1.°

$$\begin{array}{r} 7891,32 \\ 27 \\ \hline 5523924 \\ 1578264 \\ \hline 213065,64 \end{array}$$

Figura 5-10. Multiplicación de dos cantidades decimales en el *Tratado de Aritmética* (Cortázar, 1851, p. 87)

A continuación, se explica la reducción de quebrados ordinarios a decimales y viceversa, lo que le lleva a definir fracción decimal exacta, periódica pura y periódica mixta.

El libro cuarto, titulado raíces cuadradas y cúbicas de los números, realiza un estudio paralelo de la raíz cuadrada y de la raíz cúbica de los números enteros. Comienza definiendo la raíz de cierto grado de un número como "otro número cuya potencia del mismo grado es igual al número propuesto" (p. 101) (CCA5) e indica la notación para expresarlas (Figura 5-11) (CCA5).

Para indicar una raiz de un grado cualquiera de un número, se pone el signo $\sqrt{}$ delante del número, y en la abertura de este signo se pone un número que indica el grado de la raiz; este número se llama *índice* de la raiz.

Figura 5-11. Notación de las raíces de un grado cualquiera en el *Tratado de Aritmética* (Cortázar, 1851, p. 101)

Enuncia y demuestra los métodos de extracción de raíces cuadradas y cúbicas de números enteros y fraccionarios, lo que le lleva a definir las raíces inconmensurables como "las raíces de números enteros o fraccionarios que no tienen raiz exacta" (p. 111) (CCA5).

El último libro dedicado a los números abstractos estudia las proporciones. Comienza definiendo la razón de dos números como "el cociente de dichos números" (p. 130)

(CCA6), indica los nombres de los miembros de una razón y su notación (Figura 5-12) (CCA6)

> **Para indicar la razon de dos números *a* y *b*, se escribe *a* : *b*, y se lee *a* es á *b*.**

Figura 5-12. Notación de razón en el *Tratado de Aritmética* (Cortázar, 1851, p. 129)

Asimismo, define proporción a "la reunion de cuatro números, tales que la razón de los dos primeros es igual á la de dos segundos", indica su notación (Figura 5-13) (CCA6) y enuncia y demuestra las propiedades de las proporciones.

> **Para indicar que cuatro números 24, 12, 16, 8 forman proporcion, se escribe**
>
> **24 : 12 : : 16 : 8,**
>
> **y se enuncia asi: 24 es á 12 como 16 es á 8.**

Figura 5-13. Notación de proporción en el *Tratado de Aritmética* (Cortázar, 1851, p. 129)

La segunda parte de la obra titulada *Aplicaciones usuales de la aritmética, ó cálculo de los números concretos,* está dividida en dos libros. En el primero se describen las operaciones fundamentales con los números concretos, que define como aquellos en los que "está determinada la unidad" (p. 141) (CCA7). Eso le lleva a distinguir entre número complejo, aquel que "es la reunión de varios números concretos de diferente especie, pero de la misma naturaleza" (p. 141) (CCA7) y número incomplejo, aquel que "es un número concreto de una sola especie" (p. 141) (CCA7).

Para poder trabajar la reducción de números complejos a incomplejos y viceversa, enumera las medidas más usuales de Castilla de longitud, peso, capacidad para los áridos, tiempo, dinero y capacidad de los líquidos y sus relaciones con las unidades menores (Figura 5-14). A continuación, trabaja con todas ellas aportando para ello, gran variedad de ejemplos.

De longitud.

1 vara tiene.	3 pies.
1 pie..	12 pulgadas.
1 pulgada.	12 líneas.
1 línea..	12 puntos.

Figura 5-14. Medidas más usuales usadas en el *Tratado de Aritmética* (Cortázar, 1851, p. 141)

Enseguida explica las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división de los números concretos. En la suma y en la resta distingue cuando ambos términos son incomplejos, en cuyo caso la operación se hará como los números abstractos y cuando los términos son complejos que, aunque pueden reducirse a incomplejos, recomienda efectuar correspondiendo especies iguales teniendo en cuenta las propiedades del sistema de numeración decimal (CCA7).

Con respecto a la multiplicación, considera que “la naturaleza del multiplicador no influye en el producto; por lo que, para hallar el producto, deberá considerarse al multiplicador, como si fuese número abstracto” (p. 150) (CCA7). Como el problema a resolver es “conociendo el valor de una unidad, hallar el valor de un número de la misma naturaleza que dicha unidad” (p. 150) (CCA7), se deduce que “conviene en la resolución de este problema reducir el multiplicador á la especie de la unidad cuyo valor es el multiplicando” (p. 150) (CCA7).

Para el caso de la división, considera el caso en el que el dividendo y el divisor son de la misma naturaleza y, por tanto “el cociente es abstracto, y la cuestion determina su naturaleza” (p. 156) (CCA7) y el caso en el que el dividendo y el divisor son de distinta naturaleza, entonces “el divisor debe considerarse como abstracto, y el cociente es de la misma naturaleza que el dividendo” (p. 156) (CCA7).

En el libro segundo de la segunda parte se caracterizan los problemas asociados a la proporcionalidad simple, entendida como “una proporción en la cual uno de los términos es la incógnita del problema” (p. 159) (CCA7).

En primer lugar, define cuando dos cantidades homogéneas son proporcionales a otras dos o que están en razón directa de las otras dos, es decir cuando la “primera cantidad es á su homogénea, como la correspondiente á la primera es á la correspondiente á la segunda" (p. 160) (CCA7). Análogamente define cuando dos cantidades están en razón inversa de las otras dos, es decir cuando la "cantidad primera es á su homogénea, como la correspondiente á la segunda es á la correspondiente á la primera" (p. 160) (CCA7).

El resto de capítulos del libro están dedicados a resolver problemas de proporcionalidad (CCA7) que podemos clasificar en los siguientes:

- Problemas de reglas de tres o de reducción a la unidad. Aquellos que dependen de una sola proporción simple. Por ejemplo, "Una plaza sitiada tiene víveres para 15 días; ¿cuál deberá ser la racion de cada persona para sostenerse en 25 días? (p. 163).
- Problemas de regla de tres compuesta. Aquellos que dependen de dos o más proporciones simples. Por ejemplo, "40 obreros, trabajando 7 horas al dia, han hecho 300 varas en 8 dias; ¿cuántos días tardarán 31 obreros, trabajando 6 horas al dia, para hacer 459 varas? (p. 167).
- Problemas de regla de compañía. Aquellos que hayan "la ganancia ó pérdida del capital de cada socio, conociendo los capitales de los socios, y la ganancia ó pérdida del capital social" (p. 169). Por ejemplo, "Tres socios han puesto iguales capitales, el primero por 7 meses, el segundo por 5 meses y el tercero por 4 meses; han ganado 10000 rs. ¿Cuánto corresponde á cada uno?" (p. 172).
- Problemas de interés. Aquellos en los que se calcula "la ganancia que produce un capital prestado con la condición de que 100 unidades de dinero produzcan al prestador una cierta cantidad al cabo de un año" (p. 173). Por ejemplo, "¿Cuál es el capital que produce en un año 1200 reales de interés á 5 por 100?" (p. 174).
- Problemas de descuento. Aquellos en los que se calcula el descuento de una letra o pagaré, es decir "la diferencia entre el valor futuro ó nominal de la letra y su valor actual" (p. 176). Por ejemplo, "¿Cuánto vale actualmente una letra de 20000 reales, cuyo plazo es de 7 meses, y 5 el tanto de descuento anual? (p. 178).
- Problemas de regla conjunta. Aquellos en los que se debe reducir "una cantidad de cierta especie á su equivalente de otra especie, estando ambas ligadas por cierto número de equivalencias entre ellas y otras cantidades" (p. 179). Por ejemplo, "Reducir 21000 libras catalanas á reales, sabiendo que 7 libras catalanas equivalen

á 5 pesos, que un peso tiene 512 maravedises, y que 34 maravedises hacen un real" (p. 179).

- Problemas de regla de aligación. Aquellos que resuelven estos dos problemas:

> 1º Conociendo las cantidades de diferente especie, que deben entrar en una mezcla, y sus precios respectivos, hallar el precio medio, ó precio de la mezcla.
>
> 2º Conociendo el precio medio y los de las especies, hallar las cantidades de dichas especies que deben entrar en la mezcla. (p. 182)

Por ejemplo, "Se han mezclado 25 fanegas de trigo de á 40 reales la fanega con 30 fanegas á 36 reales: averiguar lo que vale cada fanega de trigo mezclado" (p. 182). Aunque define la regla de alegación con objetivos económicos, añade un ejemplo en el cual no entran en juego cantidades de dinero. Por ejemplo, "Con agua cuya temperatura es de 32º, quiero mezclar agua á 0º, ¿cuántas azumbres de las dos se deben tomar, para que resulten 100 azumbres á 19?" (p. 187).

La última parte del tratado consta de un complemento de la aritmética que contiene la teoría sobre diferentes sistemas de numeración, operaciones abreviadas de la multiplicación y la división en el sistema de numeración decimal, el sistema métrico decimal y las cantidades inconmensurables.

En el capítulo dedicado a otros sistemas de numeración, indica que "se pueden formar tantos sistemas de numeración como se quieran" (p. 190) (CCA7), que "si conviniésemos en que cada unidad de un órden cualquiera valiese b unidades del órden inmediato inferior, serian necesarias y suficientes b cifras, entre ellas el cero" (p. 190) (CCA7) y define base de un sistema de numeración como "el número de sus cifras" (p. 190) (CCA7). A continuación, aporta varios ejemplos para indicar cómo se puede escribir un número en otro sistema y viceversa.

En el siguiente capítulo, indica métodos abreviados para realizar la multiplicación cuando el multiplicador tiene muchas cifras; cuando el multiplicador es 11, 12, 13,…, 19; cuando el multiplicador es 21, 31,…, 91; cuando el multiplicador es 34; cuando el multiplicador es 5, 25, 125,…; cuando el multiplicador es 9, 99, 999,… o para multiplicar cantidades decimales (Figura 5-15) (CCA7).

Ejemplo.

```
Multiplicando   43216893
Multiplicador    6284543
               ---------
               129650679
              172867572
             216084465
            172867572
           345735144
           86433786
         259301358
         ---------------
         271598422384899
```

Productos parciales.

1	43216893
2	86433786
3	129650679
4	172867572
5	216084465
6	259301358
8	345735144

Ejemplo. 3.° Hallar en menos de 1 milésima el producto de 0,34684 36920 8102 por 25487 97897, 454.

Operacion.

```
0,34684 36920 8102
   4547 98797 8452
------------------
  69368 73841 6204
  17342 18460 4050
   1387 37476 8324
    277 47495 3664
     24 27905 8440
      3 12159 3228
        24279 0583
         2774 7488
          312 1587
           24 2788
            1 5872
              1730
               136
------------------
88403 4473, 12094
```

Figura 5-15. Métodos abreviados de la multiplicación en el *Tratado de Aritmética* (Cortázar, 1851)

Análogamente se indican métodos para realizar la división abreviadamente (Figura 5-16).

Ejemplo.

764,3201045	489	*Productos parciales.*
489	15630267	1 | 489
275 3		2 | 978
244 5		3 | 1467
30 82		4 | 1956
29 34		5 | 2445
1 480		6 | 2934
1 467		7 | 3423
1310		8 | 3912
978		9 | 4401
3324		
2934		
3905		
3423		
482		

Figura 5-16. Método abreviado de la división en el *Tratado de Aritmética* (Cortázar, 1851, p. 201)

En el capítulo dedicado al sistema métrico decimal, titulado *Nuevas medidas y pesas legales,* se listan las unidades usuales, sus múltiplos y sus divisores de las medidas longitudinales, superficiales, de capacidad y arqueo para áridos y líquidos, cúbicas o de solidez y ponderales (Figura 5-17). Aparece también una advertencia al lector sobre la obligatoriedad de estudio del sistema de numeración decimal y su nomenclatura según la Ley de pesas y Medidas establecido por Isabel II en 1849.

Medidas longitudinales.

14. Unidad usual. El *metro*, igual á la diezmillonésima parte de un cuadrante de meridiano, desde el polo del Norte al Ecuador.

Sus múltiplos.

El decámetro = diez metros.
El hectómetro = cien metros.
El kilómetro = mil metros.
El miriámetro = diez mil metros.

Sus divisores.

El decímetro = un décimo del metro.
El centímetro = un centésimo del metro.
El milímetro = un milésimo del metro.

Figura 5-17. Exposición del sistema métrico decimal en el *Tratado de Aritmética* (Cortázar, 1851, p. 202)

Por último, dedica el último capítulo de la obra al estudio de las cantidades inconmensurables, definidas como “toda cantidad cuyo valor numérico no puede hallarse exactamente, pero al cual se puede aproximar tanto como se quiera” (p. 203) (CCA7).

Se presenta un mapa conceptual (Figura 5-18) del contenido de la edición en el que se plasma el recorrido seguido, comenzando con las operaciones y propiedades de los números abstractos, tanto de los números enteros como de los fraccionarios, la divisibilidad de los números enteros y las aplicaciones prácticas de los números concretos, entre ellas, los problemas de proporcionalidad.

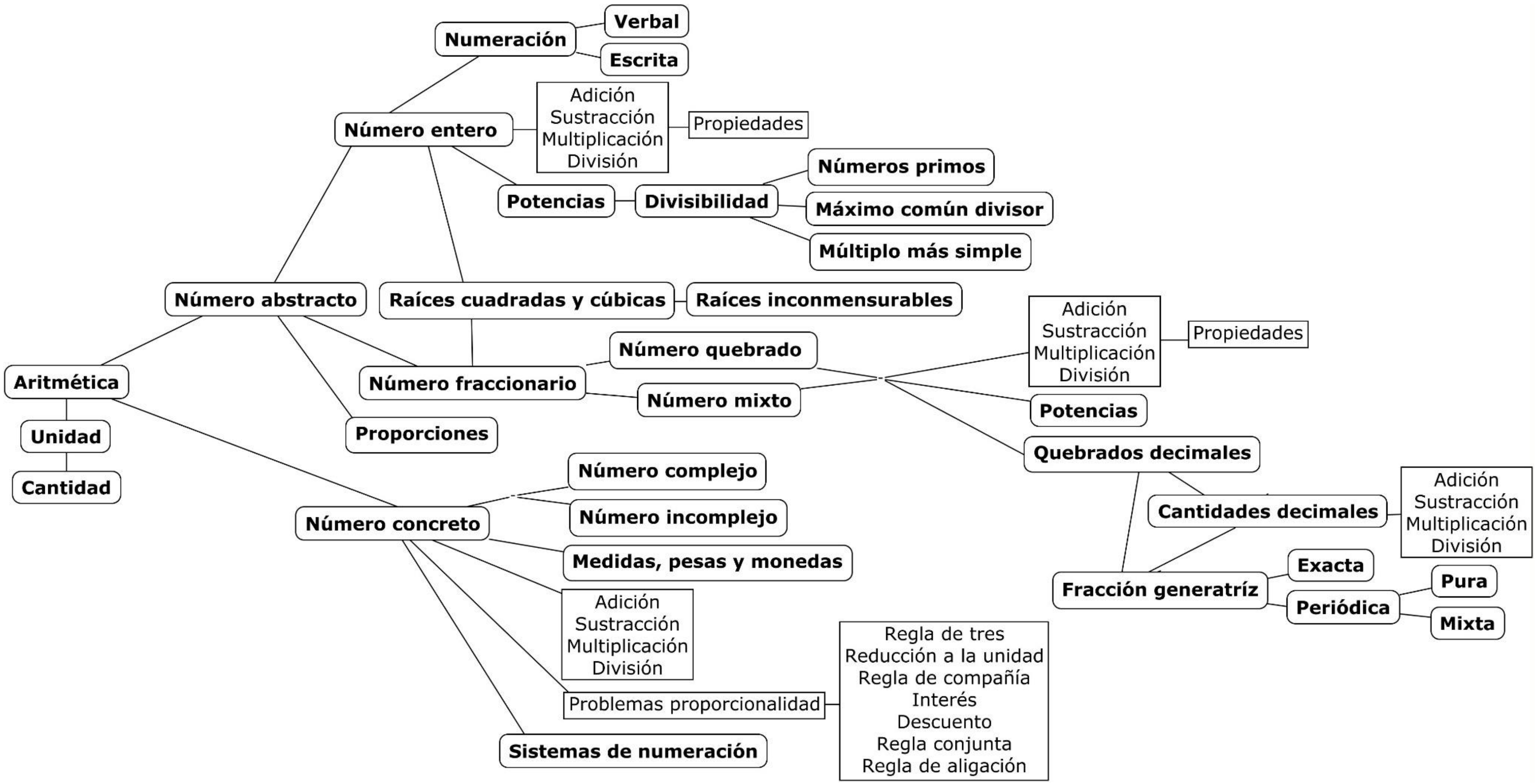


Figura 5-18. Mapa conceptual del *Tratado de Aritmética (1851)*

Sistemas de representación

Se han localizado cinco tipos de representaciones en el texto: el lenguaje verbal, representaciones algebraicas, representaciones numéricas, representaciones tabulares y de notación algorítmica:

- El lenguaje verbal hace uso de las palabras para definir conceptos, enunciar propiedades y resultados, realizar demostraciones, proponer ejemplos, ejercicios y problemas. Las demostraciones de propiedades y resultados se realizan también, a través del lenguaje verbal, aunque apoyadas en expresiones numéricas. Un ejemplo de lenguaje verbal es el enunciado: “La aritmética es la ciencia que tiene por objeto resolver los problemas de la composición y descomposición de los números” (p. 2).
- Las representaciones algebraicas aparecen en muy pocas ocasiones debido a que se trata de una obra de Aritmética. Se usan para expresar algebraicamente ecuaciones e identidades con el objetivo de clarificar propiedades, realizar demostraciones y dar ejemplos. Un ejemplo de representación algebraica es: “Para hallar la relacion que liga á estas tres cosas, llamemos c al capital, r al tanto por ciento, é i al interés […] es decir, que tendremos la proporción $100 : c :: r : i$” (p. 173).
- Para dar ejemplos mediante números y símbolos de las diferentes operaciones y propiedades, se usan representaciones numéricas, por ejemplo: “Así, 128x10=1280, 34x1000=34000.” (p. 13).
- En la obra aparece solo una representación tabular, la de la tabla de multiplicar en un formato de tabla de doble entrada (Figura 5-19).

Tabla de multiplicacion.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	15	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Figura 5-19. Representación de la tabla de multiplicar en el *Tratado de Aritmética* (Cortázar, 1851, p. 11)

- Por último, el uso de notaciones algorítmicas es común a la hora de esquematizar los resultados de los diferentes algoritmos incluidos en la obra (Figura 5-20).

1.° Hallar el *m. c. d.* de los números 3836 y 1652.

3836	1652	532	56	28
	2	3	9	2
532	56	28	0	

Figura 5-20. Representación de una notación algorítmica en el *Tratado de Aritmética* (Cortázar, 1851, p. 42)

Fenomenología

Se han encontrado nueve tipos de fenómenos o contextos: fenómenos de desplazamientos, de capacidad, masa, superficie, cronológicas, comerciales, laborales, financieros, de medida y estrictamente matemáticos, tanto aritméticos como algebraicos.

Las explicaciones de las operaciones, las demostraciones de teoremas y propiedades y los enunciados de los ejemplos dados en la primera parte del tratado, se desarrollan en un contexto fundamentalmente matemático. Se manifiestan dos tipos diferentes:

- Aritméticos: se usan para resolver ejercicios y problemas de tipo aritmético. Por ejemplo, "Hallar un medio proporcional entre los números 5 y 45" (p. 131).
- Algebraicos: se usan para resolver problemas de proporcionalidad. Por ejemplo, "Dividir un número dado en partes proporcionales á otros números dados" (p. 169).

Sin embargo, en la segunda parte abundan ejemplos, ejercicios y problemas de aplicación de la aritmética. Se distinguen contextos en los que hay que resolver problemas de situaciones que se encuentran en la naturaleza y se rigen mediante leyes físicas. Se manifiestan de cinco tipos diferentes:

- Desplazamientos: aquellas en las que debemos calcular distancias y tiempos de recorrido de uno o varios móviles en ambos sentidos de la recta o la circunferencia bajo unas condiciones dadas. Por ejemplo, "En una hora anda un móvil con movimiento uniforme 25 varas, 2 pies y 9 pulgadas: se quiere saber cuánto andará con dicho movimiento y con igual velocidad en 14 horas, 40´y 35´´" (p. 155).
- Capacidad: aquellas en las que debemos calcular los tiempos de llenado o vaciado de productos o sustancias en lugares o recipientes. Por ejemplo, "Una fuente arroja en 14 horas 2825 cántaros de agua, ¿cuántas arrojará en 23 horas?" (p. 163).
- Masa: aquellas en las que debemos calcular el peso de uno o varios objetos. Por ejemplo, "Hallar el peso de una barra de hierro de $5\ \frac{2}{3}$ pies de largo, sabiendo que cada pie de dicha barra pesa $7\ \frac{3}{4}$ libras." (p. 154).

Aquellas situaciones que implican la distribución de bienes y servicio, las denominamos situaciones económicas. Encontramos de tres tipos:

- Fenómenos comerciales: aquellos que se refieren a situaciones en las que hay implicadas operaciones de compra-venta. Por ejemplo, "1 fanega vale 23 reales y 19 maravedises, ¿cuánto valdrán 7 cahices, 9 fanegas y 9 celemines?" (p. 151).
- Fenómenos laborales: aquellos que se refieren a situaciones en las que se debe calcular el salario a percibir por una o varias personas. Por ejemplo, "28 hombres hacen una obra en $23\ \frac{2}{5}$ horas, ¿un hombre en cuántas horas hará la misma obra?" (p. 152).

- Fenómenos financieros: aquellos en los que se presentan situaciones en las que se debe determinar una ganancia o una pérdida económica. Por ejemplo, "Tres comerciantes forman sociedad; el primero pone 6500 reales, el segundo 9600 reales y el tercero 6000 reales: han ganado 25600 reales, ¿cuánto corresponde á cada uno?" (p. 171).

Igualmente encontramos fenómenos que implican el cálculo de la equivalencia entre una unidad de medida y otra, como, por ejemplo, "Reducir $\frac{7}{9}$ de duro á complejo de reales y maravedises" (p. 145).

Estrategias didácticas

La obra de Cortázar es metódica y rigurosa; él mismo justifica la obligatoriedad de exactitud en toda obra matemática añadiendo notas destinadas a los profesores de la materia indicando la falta de precisión de otros autores tanto en los enunciados como en las demostraciones. Muestra de dicho interés es la inclusión de las definiciones de axioma, lema y corolario, la distinción entre las partes de un teorema: hipótesis o suposición y conclusión, el método de reducción al absurdo para la demostración de teoremas, las definiciones de metodología analítica y sintética (inductiva y deductiva) y la definición y demostración de los teoremas recíprocos (RP).

Podemos encontrar a lo largo de toda la obra, estrategias y sugerencias que facilitan al lector el estudio de la aritmética. Por ejemplo, a la hora de llevar a la práctica una división en la que el cociente sea de una sola cifra, propone un método para averiguar si el cociente es adecuado o es mayor que el verdadero sin efectuar la multiplicación del cociente por todo el divisor (SPM).

Recomienda la memorización de la suma y resta de un número cualquiera con otro de una cifra, antes de poder hacer uso de los algoritmos de la adición y sustracción. Asimismo, recomienda la memorización de la tabla de multiplicar para hallar brevemente el producto de dos números de una cifra (SPM).

Aunque en el capítulo II del *Complemento de la Aritmética* se sugieren los métodos abreviados de la multiplicación y la división que se basan en los resultados parciales de cada cifra, los métodos ordinarios para realizar las operaciones numéricas, así como los métodos para extraer la raíz cuadrada o cúbica incluyen razonamientos que implican la descomposición de los números, haciendo uso de las propiedades de nuestro sistema de numeración decimal (SPM).

Así, al multiplicar 6835 por 4

> Diré: 5 por 4 son 20, que constan de dos decenas y ninguna unidad; escribo pues 0 en el lugar de las unidades, y guardo las 2 decenas: 3 decenas por 4 son 12 decenas, y 2 del producto arcial anterior son 14 decenas; escribo 4 en el lugar de las decenas, y guardo 1 centena: 8 centenas por 4 son 32 centenas, y una centena del producto parcial anterior son 33 centenas; escribo 3 en el lugar de las centenas y guardo 3 millares; 6 millares por 4 son 24 millares, y 3 millares del producto parcial anterior son 27 millares; escribo 7 en el lugar de los millares, y en seguida, como no hay mas cifras en el multiplicando, escribo 2 decenas de millar. (p. 12)

Destacan también los algoritmos para calcular el máximo común múltiplo de varias cantidades o los divisores de un número, los cuales se apoyan en representaciones de notación algorítmica para disminuir la dificultad de los cálculos (Figura 5-21) (SPM).

2.ª Hallar todos los divisores de 2160.

2160	2	1,	2,	4,	8,	16
1080	2					
540	2	3,	6,	12,	24,	48
270	2	9,	18,	36,	72,	144
135	3	27,	54,	108,	216,	432
45	3	5,	10,	20,	40,	80
15	3	15,	30,	60,	120,	240
5	5	45,	90,	180,	360,	720
1		135,	270,	540,	1080,	2160

Nota. Para hallar los productos, siendo el multiplicador una potencia cualquiera de un factor simple, se multiplican por la primera potencia de este factor los productos hallados siendo multiplicador la potencia inmediata inferior de dicho factor.

Asi, los productos por 3^2 se hallarán multiplicando por 3 los productos 3, 6, 12, 24, 48 hallados siendo multiplicador el 3. Los productos por 3^3 se hallarán multiplicando por 3 los productos 9, 18, 36, 72, 144, hallados siendo multiplicador 3^2.

Figura 5-21. Método para calcular los divisores de un número en el *Tratado de Aritmética* (Cortázar, 1851, p. 51)

Otro rasgo característico de la obra, consiste en la resolución de un mismo problema mediante diferentes técnicas o métodos, siempre que es posible. Cortázar anima así a los lectores, a elegir entre los diversos métodos, aquel que le sea más útil (SPM).

Por último, se ha de destacar el uso de numerosos y variados contextos, en el que se ubican los ejemplos y problemas resueltos, tanto en el sentido estrictamente matemático como en aplicaciones de las matemáticas a problemas de la vida cotidiana (APL).

5.1.2.2. Periodo 3 (1857-1873): Decimonovena edición

La decimonovena edición fue publicada en 1866 en Madrid, por la Imprenta de Antonio Peñuelas (CE2 y CE3). El ejemplar analizado puede encontrarse digitalizado en el repositorio Google Books, cuyo original pertenece a la Biblioteca Complutense de Madrid (CE4).


TRATADO

DE

ARITMÉTICA,

POR

DON JUAN CORTÁZAR,

Licenciado en ciencias, Ingeniero civil aprobado con diploma por la Escuela central de Paris, Catedrático de Algebra superior y Geometría analítica en la Universidad de Madrid, etc.

OBRA SEÑALADA EN PRIMER LUGAR PARA TEXTO EN LAS UNIVERSIDADES, INSTITUTOS Y ESCUELAS PROFESIONALES.

19.ª EDICION.

MADRID:—1866.

IMPRENTA DE D. ANTONIO PEÑUELAS,
calle de Calatrava, núm. 8.

Figura 5-22. Portada del *Tratado de Aritmética* (Cortázar, 1866)

El prólogo de la edición justifica la originalidad de los contenidos incluidos con respecto a obras de autores contemporáneos, con el objetivo de “hacer ver ya la falta, por cuantos autores naciones y extranjeros conocíamos, de exactitud en los enunciados de algunos teoremas, ya la demasiada estension de estos enunciados, ya el corto alcance de las demostraciones (p. III) (CE6).

En este se enumeran los enunciados de algunos teoremas o resultados tal y como se incluyen en otras obras antes de la primera publicación del *Tratado de Aritmética,* las razones por las cuales son erróneas y los enunciados correctos. Se señala asimismo que la razón por la que el tratado no incluye el estudio de razones y proporciones aritméticas es su falta de utilidad, y que el Gobierno francés no las incluye en sus programas de estudios (CE6).

En la obra puede distinguirse el uso de asteriscos en los párrafos y ejercicios que señala aquellos contenidos que los profesores de filosofía o escuelas profesionales podían omitir en sus clases por superar el nivel de conocimientos que se requería (CE8).

Aunque se encuentran pocas referencias a otros autores en la obra, en esta edición cita a Eratóstenes y a su método para localizar a los números primos, a Chernac y a su tabla de números primos y menores factores primos de los números compuestos hasta 1000000, a Burckhard y su tabla de todos los números primos y los factores simples de los compuestos hasta el 3036000 y al matemático francés Wantzel y su teorema para la extracción de la raíz cuadrada (CE7).

Estructura conceptual

La decimonovena edición del *Tratado de Aritmética* incluye cambios significativos con respecto a la cuarta. En general, el detalle en el que se exponen los diferentes métodos de resolución, así como el número de ejemplos, es mayor. Pero del mismo modo, contiene definiciones y contenidos más amplios con respecto a la cuarta edición.

Una de las definiciones que son ampliadas es la de Aritmética, en la cual, además de la definición que aparece en la cuarta edición, se añade que “La Aritmética enseña á efectuar con números cualesquiera las seis operaciones siguientes: sumar, restar, multiplicar, dividir, elevar á potencias y extraer raíces, que también se llaman adicion, sustraccion, multiplicacion, division, elevacion á potencias y extraccion de raíces” (p. 2).

La tabla de multiplicar elegida en la cuarta edición para mostrar el método para multiplicar un número de una cifra por otro de una cifra era una tabla de doble entrada que contiene los productos cruzados de los números de 2 a 9 (Figura 5-19). En esta edición, la tabla contiene 10 columnas con las tablas de multiplicar de los números de 0 a 9 (Figura 5-23).

TABLA DE MULTIPLICACION.

0 por 0... 0	1 por 0... 0	2 por 0... 0	3 por 0... 0	4 por 0... 0
0 por 1... 0	1 por 1... 1	2 por 1... 2	3 por 1... 3	4 por 1... 4
0 por 2... 0	1 por 2... 2	2 por 2... 4	3 por 2... 6	4 por 2... 8
0 por 3... 0	1 por 3... 3	2 por 3... 6	3 por 3... 9	4 por 3...12
0 por 4... 0	1 por 4... 4	2 por 4... 8	3 por 4...12	4 por 4...16
0 por 5... 0	1 por 5... 5	2 por 5...10	3 por 5...15	4 por 5...20
0 por 6... 0	1 por 6... 6	2 por 6...12	3 por 6...18	4 por 6...24
0 por 7... 0	1 por 7... 7	2 por 7...14	3 por 7...21	4 por 7...28
0 por 8... 0	1 por 8... 8	2 por 8...16	3 por 8...24	4 por 8...32
0 por 9... 0	1 por 9... 9	2 por 9...18	3 por 9...27	4 por 9...36
5 por 0... 0	6 por 0... 0	7 por 0... 0	8 por 0... 0	9 por 0... 0
5 por 1... 5	6 por 1... 6	7 por 1... 7	8 por 1... 8	9 por 1... 9
5 por 2...10	6 por 2...12	7 por 2...14	8 por 2...16	9 por 2...18
5 por 3...15	6 por 3...18	7 por 3...21	8 por 3...24	9 por 3...27
5 por 4...20	6 por 4...24	7 por 4...28	8 por 4...32	9 por 4...36
5 por 5...25	6 por 5...30	7 por 5...35	8 por 5...40	9 por 5...45
5 por 6...30	6 por 6...36	7 por 6...42	8 por 6...48	9 por 6...54
5 por 7...35	6 por 7...42	7 por 7...49	8 por 7...56	9 por 7...63
5 por 8...40	6 por 8...48	7 por 8...56	8 por 8...64	9 por 8...72
5 por 9...45	6 por 9...54	7 por 9...63	8 por 9...72	9 por 9...81

Figura 5-23. Disposición de la tabla de multiplicar en el *Tratado de Aritmética* (Cortázar, 1866, p. 10)

La teoría sobre los números primos es ampliada y se incluyen: la demostración de la existencia de infinitos números primos, el método para comprobar si un número es primo o no, la construcción de tablas de números primos y una tabla de números primos del 1 al 3803.

Con respecto a las demostraciones de resultados y teoremas, algunas de las que usaban valores particulares en la cuarta edición, se demuestran mediante expresiones algebraicas en esta edición, como es el caso de los teoremas que forman parte de la teoría de fracciones o de la teoría de raíces cuadradas.

La exposición del método para extraer la raíz cuadrada y cúbica de un número también sufre cambios. Mientras en la cuarta edición se exponen los diferentes métodos para extraer la raíz cuadrada o cúbica de los números según el número de cifras que tengan, en esta edición se expone el método general y a continuación se aportan diversos ejemplos. Añade, asimismo, en la parte final del tratado, un método abreviado para la extracción de la raíz cuadrada.

El último cambio afecta al estudio de los diferentes sistemas de medida españoles de época y su relación con el nuevo sistema métrico decimal. En primer lugar, se señala la importancia de una buena elección de la unidad de medida; se señala que a pesar de la promulgación de la ley de 1801 en la que se señala la obligatoriedad de uniformizar todas las medidas, en España se usan diferentes unidades de medida; continúa enumerando las medidas de longitud, de capacidad para áridos, medida para líquidos, pesas, monedas antiguas y modernas y tiempo.

Para poder trabajar con medidas cuadradas y cúbicas, se exponen algunas nociones de geometría y se resuelven varios problemas geométricos como: “Averiguar cuántos cubos menores tiene un cubo mayor, conociendo el número de veces que el lado del mayor contiene exactamente al del menor” (p. 133) (Figura 5-24).

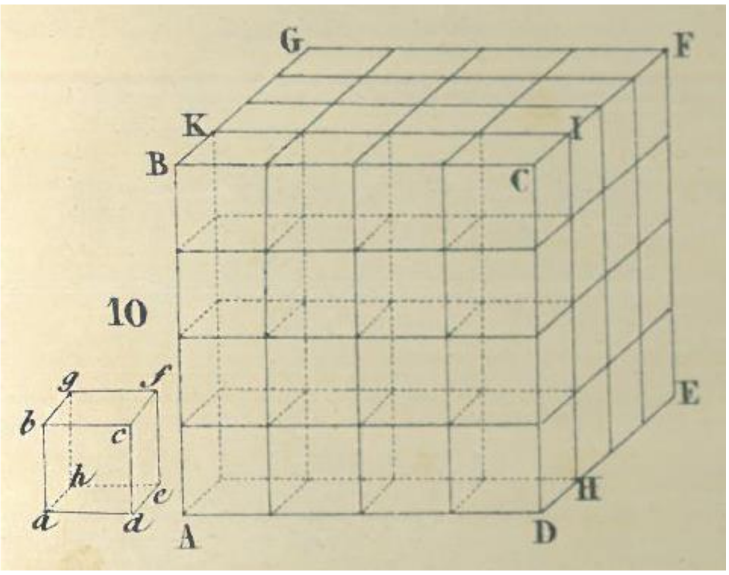


Figura 5-24. Representación de un problema en el *Tratado de Aritmética* (Cortázar, 1866, lámina final)

Antes de estudiar el sistema métrico decimal, define los conceptos de unidad de medida principal y usual, unidades mayores o múltiplos y unidades menores o submúltiplos. Enseguida enumera las unidades principales, múltiplos y submúltiplos de longitud, capacidad para áridos y líquidos, pesos, superficies y volúmenes del sistema métrico decimal.

Por último, se especifican las equivalencias aproximadas (Figura 5-25) y tablas con las equivalencias exactas (Figura 5-26) entre las unidades más usadas en Castilla y las establecidas en el sistema métrico decimal, así como las cuatro operaciones fundamentales con los números métricos.

Equivalencias aproximadas entre las unidades mas usadas de longitud de Castilla y las nuevas **(a).**

5 metros = 6 varas, 7 centimetros = 3 pulgadas, 11 kilómetros = 2 leguas.

Figura 5-25. Equivalencias aproximadas entre las unidades más usadas en Castilla y las establecidas en el sistema métrico decimal en el *Tratado de Aritmética* (Cortázar, 1866, p. 152)

Varas.	*Metros.*	*Metros.*	*Varas.*
1	0,835905	1	1,196308
2	1,671810	2	2,392616
3	2,507715	3	3,588924
4	3,343620	4	4,785232
5	4,179525	5	5,981540
6	5,015430	6	7,177848
7	5,851335	7	8,374156
8	6,687240	8	9,570464
9	7,523145	9	10,766772

Figura 5-26. Equivalencias exactas entre la vara y el metro en el *Tratado de Aritmética* (Cortázar, 1866, p. 199)

Incluye asimismo el método para reducir un número cualquiera de unidades de medida antigua a su equivalencia aproximada al sistema métrico decimal y, su aplicación a las correspondencias con todas las medidas que se usaban en las provincias españolas y las inglesas también.

Sistemas de representación

Además de los sistemas de representación incluidos en la cuarta edición, se usan gráficas de tipo geométrico, que apoyan de manera visual la exposición de los contenidos (Figura 5-27).

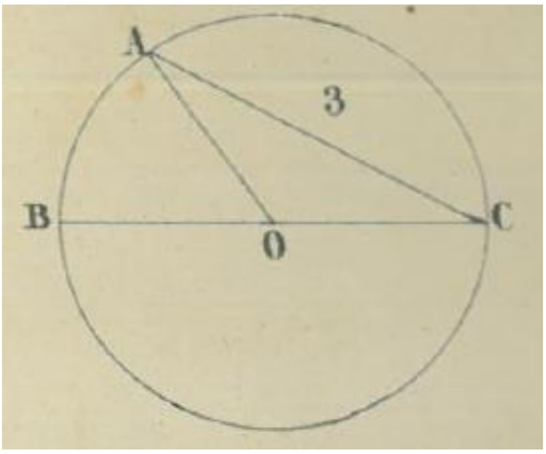


Figura 5-27. Representación gráfica en el *Tratado de Aritmética* (Cortázar, 1866, lámina final)

Fenomenología

La inclusión de nuevos contenidos en la decimonovena edición, hace surgir tres nuevas situaciones o contextos, sobre medidas de superficies, sobre transmisiones y situaciones estrictamente matemáticas de tipo geométrico:

- Fenómenos de superficies: aquellas en las que estudiamos la superficie de un cuerpo. Por ejemplo, "Cada grado del círculo máximo de la tierra tiene 20 leguas, ¿cuántas leguas tienen los 360º de dicho círculo?" (p. 142).
- Fenómenos de transmisión: aquellas en las que debemos averiguar las partes correspondientes al reparto de una herencia. Por ejemplo:

> Deja uno al morir la cantidad de 31200 duros, y su mujer encinta; y dispone en su testamento: que si su mujer pare hijo, la cantidad que se dé á la madre sea los 2/3 de la que dé al hijo; y que si pare hija, la cantidad que perciba la madre sea los 5/7 de la que se guarde para la hija. Sucede que esta mujer pare hijo é hija; y se trata de repartir la cantidad 31200 duros entre la madre y los dos hijos cumpliendo la voluntad del testador. (p. 166)

- Fenómenos matemáticos de tipo geométrico: aquellas situaciones que se usan para resolver ejercicios y problemas de tipo geométrico. Por ejemplo: "Averiguar cuántos cuadrados menores tiene un cuadrado mayor, conociendo el número de veces que el lado del mayor contiene exactamente al del menor" (p. 132).

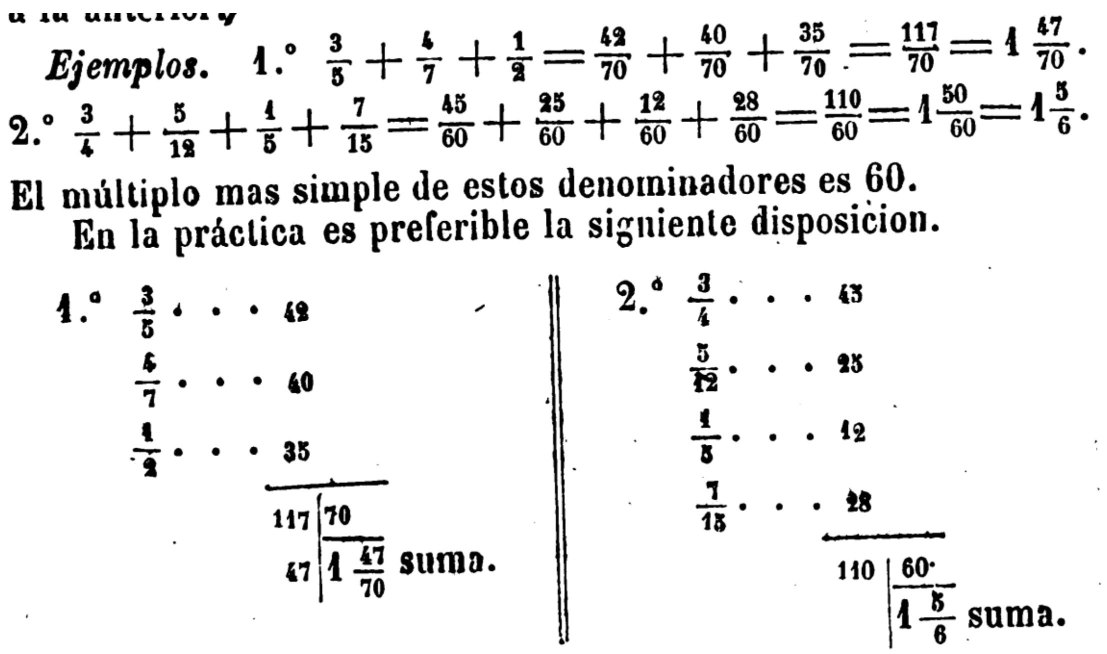
Estrategias didácticas

En esta edición, a través del prólogo, Cortázar recomienda a los lectores del tratado que representen las cantidades sobre las que giran los razonamientos, mediante signos, ya sean guarismos o letras. De otro modo, “no se fijan las ideas, los razonamientos son vagos, y por lo mismo difíciles de ser comprendidos” (p. V). También opina que no es conveniente el uso de las letras en las primeras proposiciones y, éstas se pueden demostrar usando guarismos siempre que “los guarismos elegidos sean independientes de sus valores particulares” (p. V). Sin embargo, en las cantidades que entran en un teorema en el que “deben satisfacer á condiciones que no llenan números tomados á arbitrio” (p. VI), es conveniente el uso de letras (SPM).

En contraposición con la cuarta edición, el autor justifica que, aunque la exposición del sistema métrico se realiza en pocas páginas, considera su planteamiento más completo que el de resto de autores (SCO):

> partiendo de las equivalencias dadas por la Comisión de pesa y medidas, hemos hallado científicamente las equivalencias aproximadas entre las medidas llamadas de Castilla y las métricas, y dado la regla para hallar equivalencias análogas entre las medidas de cualquier provincia y las métricas. (p. IV)

Otra de las mejoras incluidas en esta edición es la recomendación de una notación algorítmica para realizar sumas y restas de fracciones, que el autor señala que “En la práctica es preferible” (p. 68) (Figura 5-28) (SPM) y la aportación de la lámina final de representaciones con algunas representaciones gráficas, que apoyan visualmente la comprensión de conceptos relacionados con la geometría (RG).



Ejemplos. 1.° $\frac{3}{5}+\frac{4}{7}+\frac{1}{2}=\frac{42}{70}+\frac{40}{70}+\frac{35}{70}=\frac{117}{70}=1\frac{47}{70}$.

2.° $\frac{3}{4}+\frac{5}{12}+\frac{1}{5}+\frac{7}{15}=\frac{45}{60}+\frac{25}{60}+\frac{12}{60}+\frac{28}{60}=\frac{110}{60}=1\frac{50}{60}=1\frac{5}{6}$.

El múltiplo mas simple de estos denominadores es 60.

En la práctica es preferible la siguiente disposicion.

1.° $\frac{3}{5}$ . . . 42
$\frac{4}{7}$ . . . 40
$\frac{1}{2}$ . . . 35
117 | 70
47 | $1\frac{47}{70}$ suma.

2.° $\frac{3}{4}$ . . . 45
$\frac{5}{12}$ . . . 25
$\frac{1}{5}$ . . . 12
$\frac{7}{15}$ . . . 28
110 | 60
$1\frac{5}{6}$ suma.

Figura 5-28. Algoritmo para resolver la suma y resta de fracciones en el *Tratado de Aritmética* (Cortázar, 1866, p. 68)

Conclusiones

En el prólogo de la mayoría de las ediciones, Cortázar justifica la originalidad de la secuenciación de los contenidos con respecto a obras de otros autores contemporáneos, así como el rigor de las demostraciones tan necesarias para aportarles formalidad.

Una característica común en la obra de Cortázar es el uso estricto del lenguaje y estructura formal de las matemáticas. El *Tratado de Aritmética* es la obra elegida por el autor para sentar las bases de este, y lo hace a través de las notas que incluye en las que expone las definiciones y técnicas propias de la disciplina.

Se trata, además, de una de las obras con mayor diversidad en el uso de contextos en el planteamiento de ejemplos, ejercicios y problemas, pues abarca situaciones de tipo físico o natural, social y de equivalencias entre medidas. No obstante, la fenomenología que predomina en sus páginas, es la estrictamente matemática de tipo aritmético.

Los sistemas de representación hallados para exponer definiciones y enunciados de teoremas y problemas es fundamentalmente el lenguaje verbal y numérico, pero también se encuentran representaciones algebraicas como apoyo a las demostraciones de teoremas, algorítmicas que guían los diferentes métodos de cálculo incluidos y tabulares para representar las tablas de multiplicar. Entre las mejoras realizadas a las ediciones posteriores, se incluyen representaciones gráficas para ayudar a estudiar las medidas de superficie y volumen.

5.2. Obra: *Aritmética práctica para uso de las escuelas primarias*

5.2.1. Caracterización de la obra

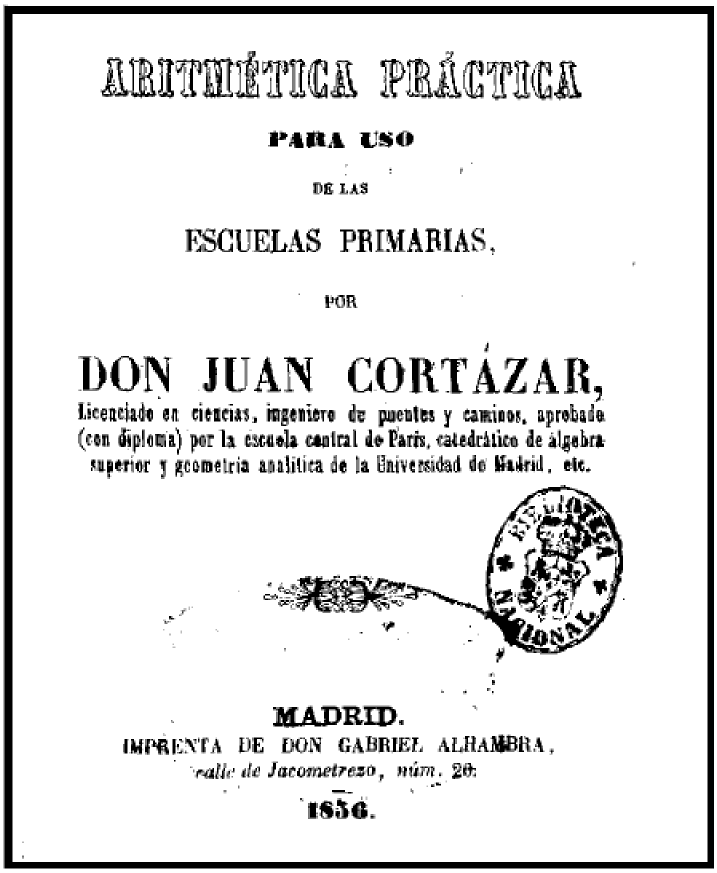
Tal y como él mismo indica en el prólogo de la *Aritmética práctica*, Cortázar fue "Escitado por varias personas a escribir un tratadito de Aritmética para la primera enseñanza" (1856, p. III) (CO5). Fue publicada en 1856, y se tiene constancia de que fue reeditada hasta en una décimo segunda ocasión, en 1900 (CO2 y CO3). Sin embargo, no tuvo la misma acogida que las obras destinadas a la segunda enseñanza, ni en las escuelas de primera enseñanza ni en las Escuelas Normales, quizás por tener una mayor competencia o por la dificultad de influir en los maestros que formaban un colectivo más numeroso y más disperso por todo el Reino (Vea, 1995) (CO6).

La obra estaba dirigida principalmente a alumnos de educación primaria, sin embargo, en el prólogo de la obra se indica que Cortázar la considera útil "no solo á los niños sino tambien á los adultos" (1856, p. III) (CO5).

5.2.2. Caracterización de la edición analizada

5.2.2.1. Periodo 2 (1845-1857): Primera edición

Es este caso solo hemos tenido acceso a la primera edición, impresa en 1856 en Madrid en la Imprenta de Don Gabriel Alhambra. Analizaremos un ejemplar que forma parte de la Biblioteca Nacional de España y que ha llegado hasta nosotros a través de repositorios digitales (CE2, CE3 y CE4).


ARITMÉTICA PRÁCTICA
PARA USO
DE LAS
ESCUELAS PRIMARIAS,
POR
DON JUAN CORTÁZAR,
Licenciado en ciencias, ingeniero de puentes y caminos, aprobado (con diploma) por la escuela central de París, catedrático de álgebra superior y geometría analítica de la Universidad de Madrid, etc.

MADRID.
IMPRENTA DE DON GABRIEL ALHAMBRA,
calle de Jacometrezo, núm. 26.
1856.

Figura 5-29. Portada de la *Aritmética práctica para uso de las escuelas primarias* (Cortázar, 1856)

Está formado por un solo tomo de 108 páginas, dividido en ocho capítulos y un anexo con las correspondencias entre las medidas de las diferentes provincias de España y el sistema métrico decimal. En contraposición con el resto de su obra, Cortázar abandona en esta ocasión el lenguaje matemático y utiliza explicaciones aptas para los estudiantes de la educación primaria (CE5).

Aunque el tratado no incluye índice alguno, la Tabla 5-2 recoge los títulos de cada uno de los capítulos que lo forman (CE5).

Tabla 5-2. *Secuenciación de contenidos de la Aritmética práctica para uso de las escuelas primarias de Juan Cortázar, 1856.*

CAPÍTULO PRIMERO: Numeración	Págs. 1-6
CAPÍTULO SEGUNDO: Las cuatro reglas u operaciones fundamentales	Págs. 6-34
CAPÍTULO TERCERO: Divisibilidad	Págs. 34-36

Estructura conceptual

El primer capítulo de la *Aritmética Práctica*, dedicado a la numeración, incluye en primer lugar las definiciones *de número entero, unidad, número quebrado* y *número mixto*. Así, “Se llama número entero una sola cosa ó la reunion de varias cosas iguales ó semejantes” (p. 1) (CCAP1), “Cada una de las cosas iguales ó semejantes que componen un número entero, se llama unidad” (p. 1) (CCAP1), “Si una unidad se divide en partes iguales, una de estas partes, ó la reunión de varias de estas partes, se llama número quebrado” (p. 1) (CCAP1) y “Se llama número mixto el número compuesto de entero y quebrado” (p. 1) (CCAP1). Asimismo, distingue entre “los números en que no se espresa ó determina la naturaleza de la unidad” (p. 1) (CCAP1), llamados números abstractos y “los números en que se espresa la unidad” (p. 2) (CCAP1), llamados números concretos.

Continúa explicando y aportando ejemplos sobre la numeración verbal y escrita de los números enteros, cuyo objetivo consiste en “nombrar todos los números enteros abstractos con pocas palabras, y escribirlas con un corto número de signos ó figuras” (p. 2).

A continuación, se explican las cuatro operaciones fundamentales de los números enteros, es decir, “adicion, sustraccion, multiplicacion y division de los números enteros” (p. 2) (CCAP2). Pero antes se indica que “La aritmética práctica tiene por objeto la resolucion de los problemas que dependen de estas cuatro reglas, aplicadas á números enteros, quebrados y mixtos; problemas que ocurren continuamente en el trato social” (p. 6) (CCAP1).

Con respecto a la suma, se indican los nombres de los términos de la suma y se define, sumar varios números enteros como "reunir dichos números en uno solo" (p. 6) (CCAP2). Por otro lado, se desarrolla la tabla de la suma de dos números de una cifra (Figura 5-30) y se indica a los alumnos que "Sabiendo de memoria esta tabla, no se encontrará gran dificultad en sumar un número de mas de una cifra con otro de una sola" (p. 7) (CCAP2).

TABLA DE LA SUMA DE DOS NÚMEROS DE UNA CIFRA.

0 y 0... 0	1 y 0... 1	2 y 0... 2	3 y 0... 3	4 y 0... 4
0 y 1... 1	1 y 1... 2	2 y 1... 3	3 y 1... 4	4 y 1... 5
0 y 2... 2	1 y 2... 3	2 y 2... 4	3 y 2... 5	4 y 2... 6
0 y 3... 3	1 y 3... 4	2 y 3... 5	3 y 3... 6	4 y 3... 7
0 y 4... 4	1 y 4... 5	2 y 4... 6	3 y 4... 7	4 y 4... 8
0 y 5... 5	1 y 5... 6	2 y 5... 7	3 y 5... 8	4 y 5... 9
0 y 6... 6	1 y 6... 7	2 y 6... 8	3 y 6... 9	4 y 6...10
0 y 7... 7	1 y 7... 8	2 y 7... 9	3 y 7...10	4 y 7...11
0 y 8... 8	1 y 8... 9	2 y 8...10	3 y 8...11	4 y 8...12
0 y 9... 9	1 y 9...10	2 y 9...11	3 y 9...12	4 y 9...13
5 y 0... 5	6 y 0... 6	7 y 0... 7	8 y 0... 8	9 y 0... 9
5 y 1... 6	6 y 1... 7	7 y 1... 8	8 y 1... 9	9 y 1...10
5 y 2... 7	6 y 2... 8	7 y 2... 9	8 y 2...10	9 y 2...11
5 y 3... 8	6 y 3... 9	7 y 3...10	8 y 3...11	9 y 3...12
5 y 4... 9	6 y 4...10	7 y 4...11	8 y 4...12	9 y 4...13
5 y 5...10	6 y 5...11	7 y 5...12	8 y 5...13	9 y 5...14
5 y 6...11	6 y 6...12	7 y 6...13	8 y 6...14	9 y 6...15
5 y 7...12	6 y 7...13	7 y 7...14	8 y 7...15	9 y 7...16
5 y 8...13	6 y 8...14	7 y 8...15	8 y 8...16	9 y 8...17
5 y 9...14	6 y 9...15	7 y 9...16	8 y 9...17	9 y 9...18

Figura 5-30. Tabla de sumar en la *Aritmética práctica para uso de las escuelas primarias* (Cortázar, 1856, p. 7)

A continuación, se enuncia la regla para sumar varios números enteros (CCAP2):

> se colocan unos debajo de otros de manera que se correspondan las cifras de igual orden. Se suman en seguida las unidades simples, y si esta suma contiene decenas, se guardan para añadirlas á la suma de las decenas, y solo se escriben las unidades restantes. Se suman las decenas, y si esta suma contiene centenas, se guardan para añadirlas á la suma de las centenas, y solo se escriben las decenas restantes; y asi sucesivamente. (pp. 7-8)

Por otro lado, se aportan varios ejemplos de ejercicios y problemas relativos a la suma de varios números enteros, con sus respectivas explicaciones (Figura 5-31) (CCAP2).

1.º **Hallar la suma de los números 49839, 287, 321, 4502.**

OPERACION.

Sumandos	49839
	287
	321
	4502
Suma....	54949

Esplicacion. Lo primero que haremos es colocar los sumandos, como aquí se vé, de modo que las cifras de igual orden se hallen en línea vertical, y en seguida se tira una raya horizontal.

Despues diremos: 9 y 7 16, y 1 17, y 2 19, escribo el 9 y llevo 1; 1 y 3 4, y 8 12, y 2 14, escribo el 4 y llevo 1; 1 y 8 9, y 2 11, y 3 14, y 5 19, escribo el 9 y llevo 1; 1 y 9 10, y 4 14, escribo el 4 y llevo 1; 1 y 4 5: luego la suma es 54949.

Figura 5-31. Ejemplo de adición en la *Aritmética práctica para uso de las escuelas primarias* (Cortázar, 1856, p. 8)

Por último, se indica el procedimiento para hacer la prueba de la adición, entendiendo por prueba de una operación a “otra operación cuyo objeto es asegurarse de la exactitud de la primera” (p. 9) (CCAP2):

> Para hacer la prueba de la adicion, se suman las columnas de las unidades, decenas, centenas etc, en un orden contrario al que se ha seguido para hallar la suma, es decir, que si se ha hallado la suma principiando por arriba, se hallará nuevamente la suma principiando por abajo. Las dos sumas deberán ser las mismas para que la operación esté bien hecha. (p. 10)

Análogamente, se define restar un número a otro mayor como “quitar el menor del mayor” (p. 10) (CCAP2), se indica los nombres de los términos de una resta, se desarrolla la tabla de la sustracción, se indica la regla para restar un número de otro mayor y se aportan ejercicios y problemas con sus respectivas explicaciones (Figura 5-32) (CCAP2).

Ejemplos. 1.º Restar del número 767543 el número 538901.

OPERACION.

767543 *Minuendo.*
538901 *Sustraendo*

228642 *Resto ó diferencia.*

Esplicacion. Diremos: de 1 á 3 van 2, que escribo debajo; de 0 á 4 van 4; de 9 á 5 no puede ser, por lo que añado 10 al 5, y digo de 9 á 15 van 6. Ahora añado 1 á la cifra siguiente 8 del sustraendo, y digo de 9 á 7 no puede ser, pero añadiendo 10 al 7, diré de 9 á 17 van 8. Añado 1 á la cifra 3, y diré de 4 á 6 van 2, de 5 á 7 van 2.

Figura 5-32. Ejemplo de sustracción en la *Aritmética práctica para uso de las escuelas primarias* (Cortázar, 1856, p. 12)

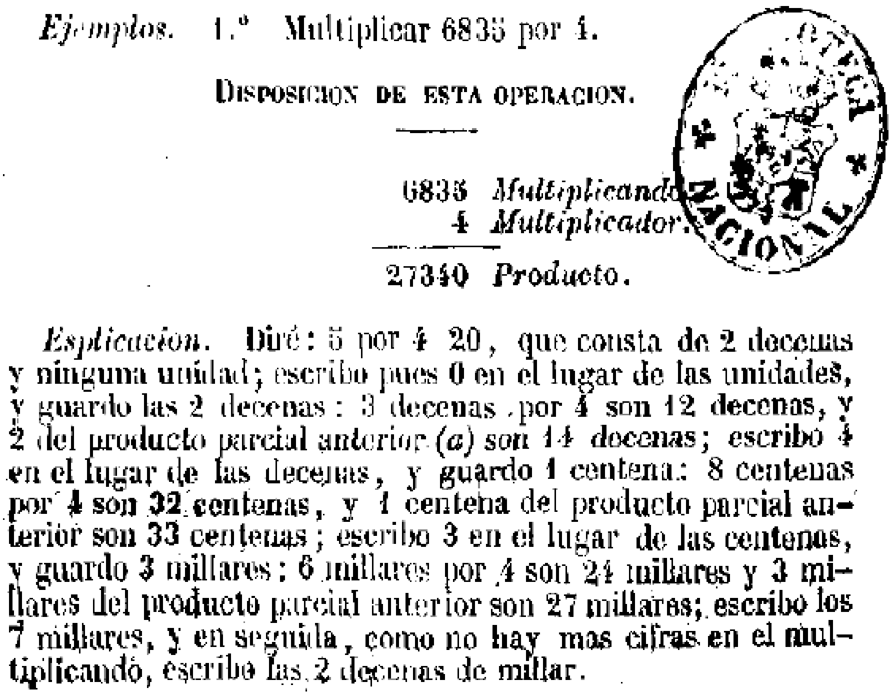
La multiplicación entre un número entero por otro se define como "la suma de tantos números iguales al primero como unidades tiene el segundo" (p. 13). También se indican los nombres de los términos de toda multiplicación y se desarrollan las tablas de multiplicar desde el 0 hasta el 9 (Figura 5-33) (CCAP2).

TABLA DE LA MULTIPLICACION.

0 por 0.. 0	1 por 0.. 0	2 por 0.. 0	3 por 0.. 0	4 por 0.. 0
0 por 1.. 0	1 por 1.. 1	2 por 1.. 2	3 por 1.. 3	4 por 1.. 4
0 por 2.. 0	1 por 2.. 2	2 por 2.. 4	3 por 2.. 6	4 por 2.. 8
0 por 3.. 0	1 por 3.. 3	2 por 3.. 6	3 por 3.. 9	4 por 3..12
0 por 4.. 0	1 por 4.. 4	2 por 4.. 8	3 por 4..12	4 por 4..16
0 por 5.. 0	1 por 5.. 5	2 por 5..10	3 por 5..15	4 por 5..20
0 por 6.. 0	1 por 6.. 6	2 por 6..12	3 por 6..18	4 por 6..24
0 por 7.. 0	1 por 7.. 7	2 por 7..14	3 por 7..21	4 por 7..28
0 por 8.. 0	1 por 8.. 8	2 por 8..16	3 por 8..24	4 por 8..32
0 por 9.. 0	1 por 9.. 9	2 por 9..18	3 por 9..27	4 por 9..36
5 por 0.. 0	6 por 0.. 0	7 por 0.. 0	8 por 0.. 0	9 por 0.. 0
5 por 1.. 5	6 por 1.. 6	7 por 1.. 7	8 por 1.. 8	9 por 1.. 9
5 por 2..10	6 por 2..12	7 por 2..14	8 por 2..16	9 por 2..18
5 por 3..15	6 por 3..18	7 por 3..21	8 por 3..24	9 por 3..27
5 por 4..20	6 por 4..24	7 por 4..28	8 por 4..32	9 por 4..36
5 por 5..25	6 por 5..30	7 por 5..35	8 por 5..40	9 por 5..45
5 por 6..30	6 por 6..36	7 por 6..42	8 por 6..48	9 por 6..54
5 por 7..35	6 por 7..42	7 por 7..49	8 por 7..56	9 por 7..63
5 por 8..40	6 por 8..48	7 por 8..56	8 por 8..64	9 por 8..72
5 por 9..45	6 por 9..54	7 por 9..63	8 por 9..72	9 por 9..81

Figura 5-33. Tablas de multiplicar en la *Aritmética práctica para uso de las escuelas primarias* (Cortázar, 1856, p. 14)

Tras recomendar al lector, aprenderse la tabla de memoria, desarrolla la regla para multiplicar distinguiendo entre cuatro casos: producto de un número de varias cifras por otro de una sola, producto de un número por 10, producto de un número de varias cifras por otro de varias cifras y producto de un número por otro cuando uno termina en uno o más ceros. En todos los casos, se aportan varios ejemplos con una pequeña explicación (Figura 5-34) (CCAP2).



Ejemplos. 1.º Multiplicar 6835 por 4.

DISPOSICION DE ESTA OPERACION.

6835 *Multiplicando.*
4 *Multiplicador.*
27340 *Producto.*

Esplicacion. Diré: 5 por 4 20, que consta de 2 decenas y ninguna unidad; escribo pues 0 en el lugar de las unidades, y guardo las 2 decenas: 3 decenas por 4 son 12 decenas, y 2 del producto parcial anterior (a) son 14 decenas; escribo 4 en el lugar de las decenas, y guardo 1 centena: 8 centenas por 4 son 32 centenas, y 1 centena del producto parcial anterior son 33 centenas; escribo 3 en el lugar de las centenas, y guardo 3 millares: 6 millares por 4 son 24 millares y 3 millares del producto parcial anterior son 27 millares; escribo los 7 millares, y en seguida, como no hay mas cifras en el multiplicando, escribo las 2 decenas de millar.

Figura 5-34. Ejemplo de multiplicación en la *Aritmética práctica para uso de las escuelas primarias* (Cortázar, 1856, p. 15)

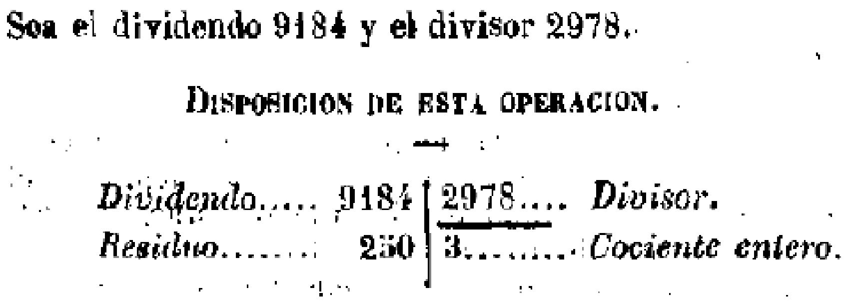
Posteriormente se aportan pequeñas reglas para multiplicar un número de forma abreviada por 11, por 19 y por 21. Por otro lado, se detalla la prueba de la multiplicación para que el lector compruebe si ha realizado la operación correctamente.

Antes de aportar ejemplos de problemas sobre la multiplicación, se detallan las equivalencias de las unidades de medida de longitud, capacidad para áridos y líquidos, superficie, masa, tiempo y dinero más usuales de España. Tal y como el mismo autor señala en el prólogo de la obra,

> Esplico el sistema de las medidas y pesas mas generalizadas de España, ó llámense de Castilla, y las monedas; y tambien las unidades cuadradas ó superficiales, anteponiendo la definicion intuitiva de cuadrado, la definicion ordinaria de unidades cuadradas, y la regla para hallar el número de cuadrados menores que contiene un cuadrado mayor. (p. III)

La última parte del capítulo está dedicado a la división de números enteros. En primer lugar, se definen mitades, tercios o terceras partes de un número, cuartos o cuartas partes, etc. como las partes iguales que se obtienen cuando un número cualquiera se divide entre 2, 3, 4, etc.

A continuación se define partir o dividir un número entero por otro, como el proceso por el cual se halla “el valor de una de tantas partes iguales del primero, como unidades tiene el segundo” (p. 24), se indican los nombres de cada una de las partes de una división, se distingue entre división exacta e inexacta y se explica el método para dividir dos números distinguiendo entre tres casos: cuando el cociente y el divisor tienen una cifra pero el dividiendo tiene una o dos, cuando el cociente tiene una cifra pero el dividendo y el divisor tienen varias y cuando el cociente tiene varias cifras (Figura 5-35) (CCAP2).



Sea el dividendo 9184 y el divisor 2978.

DISPOSICION DE ESTA OPERACION.

Dividendo....	9184	2978....	*Divisor.*
Residuo.......	250	3.........	*Cociente entero.*

Figura 5-35. Ejemplo de división en la *Aritmética práctica para uso de las escuelas primarias* (Cortázar, 1856, p. 26)

Posteriormente se detalla la prueba de la división y se aportan una serie de problemas con sus respectivas soluciones relativas al procedimiento de la división.

El siguiente capítulo está dedicado a la divisibilidad de los números enteros. Se enuncian las definiciones múltiplo como “un número entero que contiene á otro entero un número exacto de veces” (p. 34) (CCAP3), divisor como “Un número entero que está contenido en otro entero un número exacto de veces” (p. 34) (CCAP3) y número primo o simple como “el número que no es divisible mas que por sí mismo y por la unidad” (p. 34) (CCAP3). Tras desarrollar la lista de los números primos menores que 100, se enuncian las reglas de divisibilidad entre 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 y 11, y se aportan una serie de ejemplos con solución.

El libro tercero, dedicado a los quebrados, es abordado desde la división en partes iguales de la unidad. Así, “se llama número quebrado, ó simplemente quebrado ó fraccion una de las partes iguales en se divide la unidad, ó la reunión de varias partes iguales de la unidad” (p. 37) (CCAP4). Se indica su notación, cómo deben escribirse y leerse las fracciones, así como los nombres de cada una de las partes de ésta (Figura 5-36) (CCAP4).

Asi, los quebrados un noveno, cuatro quintos, veinte y tres quinceavos se escribirán $\frac{1}{9}$, $4|5$, ${}^{23}/_{15}$.

Figura 5-36. Notación y lectura de los quebrados en la *Aritmética práctica para uso de las escuelas primarias* (Cortázar, 1856, p. 38)

También se estudian los quebrados mayores, iguales y menores a la unidad. Esto le lleva a la definición y notación de un número mixto (Figura 5-37) (CCAP4).

21. Se llama número *mixto* el número que consta de un entero y un quebrado; como $4\ {}^{3}/_{7}$.

Figura 5-37. Notación de los números mixtos en la *Aritmética práctica para uso de las escuelas primarias* (Cortázar, 1856, p. 38)

Las propiedades que los quebrados tienen con respecto al producto le llevan al principio para simplificar quebrados y a la reducción a un denominador común de varios quebrados. Estas propiedades se enuncian, pero no se demuestran, sin embargo, vienen acompañadas de numerosos ejemplos con sus respectivas explicaciones.

A continuación, se detallan y aportan ejemplos de las cuatro operaciones fundamentales de los quebrados y mixtos. Se señala que “las definiciones de sumar y restar quebrados ó mixtos son las mismas que las de sumar y restar números enteros” (p. 41) (CCAP4) y procede a explicar cada una de las operaciones.

Comienza con la suma y resta de quebrados en el caso en el que tengan el mismo denominador y en el caso en el que tengan distinto, añadiendo diversos ejemplos, y después, describe el método para sumar y restar números mixtos. En el caso de la suma, “se suman primeramente los quebrados, y si de esta suma resultan algunas unidades, se guardan para sumarlas con los enteros” (p. 43) (CCAP4). Análogamente se señala la regla para la sustracción de números mixtos (Figura 5-38), pero debe diferenciar también el caso en el que el quebrado del minuendo sea menor que el del sustraendo (CCAP4).

Ejemplos. **1.º 17 $\frac{3}{4}$ — 8 $\frac{1}{2}$. Restando de $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{2}$, queda $\frac{1}{4}$; y restando de 17 8, quedan 9; luego el resto total es 9 $\frac{1}{4}$.**

Figura 5-38. Resta de números mixtos en la *Aritmética práctica para uso de las escuelas primarias* (Cortázar, 1856, p. 44)

Se define el producto de un números entero, quebrado o mixto por un quebrado como “el valor de las partes del multiplicando que indica el multiplicador” (p. 47) (CCAP4). Por ello, se distinguen tres casos a la hora de multiplicar: el de un quebrado por un entero, el de dos quebrados y el de números mixtos. Se aportan ejemplos y se resuelven problemas para dar soporte a cada método. Se considera que “en la multiplicación de números concretos el multiplicando es de la misma naturaleza que el producto, y el multiplicador se considera, para hallar el producto, como abstracto” (p. 48) (Figura 5-39).

Ejemplos. 1.º ¿Cuánto valen $5\frac{2}{3}$ varas á $7\frac{3}{4}$ reales la vara?

Conocemos el valor $7\frac{3}{4}$ reales de una vara, y queremos hallar el de $5\frac{2}{3}$ varas; tenemos pues que multiplicar $7\frac{3}{4}$ reales por $5\frac{2}{3}$.

CÁLCULO.

$$7\tfrac{3}{4} \times 5\tfrac{2}{3}$$

$$\begin{array}{r|l} 31 & \\ 17 & \\ \hline 217 & \\ 31 & \\ \hline 527 & 12 \\ \cline{2-2} 47 & 43\tfrac{11}{12} \\ 11 & \end{array}$$

reales, valor de las $5\frac{2}{3}$ *varas.*

Figura 5-39. Problema sobre productos de números quebrados en la *Aritmética práctica para uso de las escuelas primarias* (Cortázar, 1856, p. 48)

Análogamente se define,

> partir ó dividir de un número cualquiera entero, quebrado o mixto, llamado dividendo, por otro número cualquiera entero, quebrado ó mixto, llamado divisor, es hallar un tercer número llamado cociente que multiplicado por el divisor dé por producto el dividendo. (p.49)

Se distinguen tres casos a la hora de explicar el procedimiento de la división: la división de un quebrado o un número mixto entre un número entero, un número entero entre un quebrado, dos quebrados y un entero, quebrado o mixto entre un número mixto. Para ello se aportan numerosos ejemplos y problemas en los que se use la división con números concretos (Figura 5-40). En este caso, considera que o bien el dividendo y el divisor son de la misma naturaleza y, por tanto “el cociente es abstracto, y la cuestion determina su naturaleza” (p. 51) o bien que el dividendo y el divisor sean heterogéneos, y entonces “el divisor debe considerarse como abstracto, y el cociente es de la misma naturaleza que el dividendo” (p. 51).

Ejemplos. 1.° Una fuente arroja $3\frac{1}{2}$ cuartillos de agua en cada minuto; ¿en cuántos minutos llenará una vasija de $35\frac{3}{4}$ cuartillos de cabida?

Tardará tantos minutos cuantas veces $3\,^1/_2$ cuartillos estén contenidos en $35\,^1/_4$ cuartillos.
Tenemos pues que partir $35\,^3/_4$ por $3\,^1/_2$.

$$35\,^3/_4 : 3\,^1/_2 = \frac{143}{4} : \frac{7}{2}$$

$$\begin{array}{r|l} 143 & \\ 2 & \\ \hline 286 & 28 \\ \cline{2-2} 06 & 10\frac{6}{28} = 10\frac{3}{14} \text{ minutos,} \end{array}$$

que tardará la fuente en llenar la vasija.

Figura 5-40. Problema sobre división de quebrados en la *Aritmética práctica para uso de las escuelas primarias* (Cortázar, 1856, p. 51)

En el capítulo quinto, se definen los quebrados decimales como aquellos que “tienen por denominador la unidad seguida de uno ó mas ceros” (p. 55) (CCAP4) y a las cantidades decimales “á los números mixtos cuya fracción sea decimal, y también á las mismas fracciones ó quebrados decimales” (p. 55) (CCAP4).

También se indica que los quebrados decimales cuyo denominador “es 10, 100, 1000, 10000, 100000, 1000000, etc. las partes que representa el quebrado, se llaman respectivamente décimas, centésimas, milésimas, diezmilésimas, cienmilésimas, millonésimas, etc.” (p. 55). Con respecto a las cantidades decimales, “pueden escribirse sin denominador, escribiendo la parte entera de la cantidad decimal ó un cero si no hay parte entera, en seguida una coma, y sucesivamente las décimas, centésimas, milésimas, diezmilésimas, cienmilésimas, millonésimas, etc.” (p. 55) (CCAP4). Por otro lado, para leer una cantidad decimal, “se enuncia primeramente la parte entera, y luego se enuncia la parte decimal como si fuera entera, diciendo que son unidades del orden de su última cifra” (pp. 55-56) (CCAP4).

Posteriormente se describen las operaciones fundamentales de las cantidades decimales. Las operaciones de suma y resta se definen de forma análoga que en los casos de números enteros (Figura 5-41) (CCAP4).

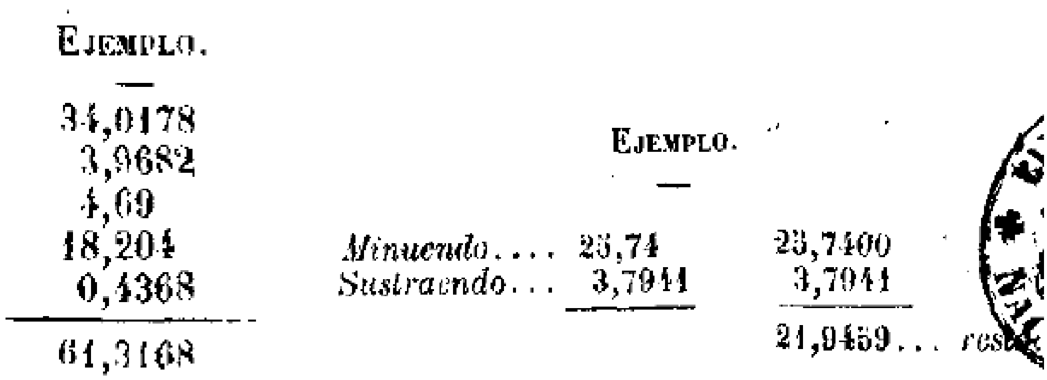


Figura 5-41. Suma de cantidades decimales en la *Aritmética práctica para uso de las escuelas primarias* (Cortázar, 1856, pp. 56-57)

Se distinguen tres casos en la multiplicación y en la división de cantidades decimales: cuando se opera una cantidad decimal por la unidad seguida de uno o más ceros, cuando se opera una cantidad decimal por una entera y cuando se operan dos cantidades decimales (Figura 5-42) (CCAP4).

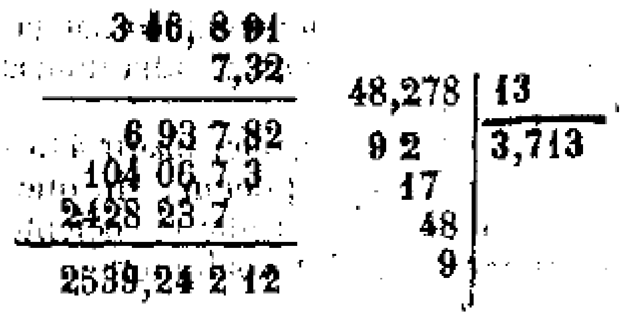


Figura 5-42. Producto y división de cantidades decimales en la *Aritmética práctica para uso de las escuelas primarias* (Cortázar, 1856, pp. 58-59)

El capítulo sexto comienza definiendo número complejo como “la reunión de varios números concretos de diferente especie, pero de la misma naturaleza” (p. 60) (Figura 5-43) (CCAP5).

Asi, 7 varas, 2 pies y 9 pulgadas es un número complejo. Tambien lo son los siguientes: 20 fanegas y 9 celemines; 10 cántaras, 3 azumbres, 2 cuartillos y 1 copa; 20 quintales, 3 arrobas, 11 libras, 6 onzas y 9 adarmes.

Figura 5-43. Ejemplos de números complejos en la *Aritmética práctica para uso de las escuelas primarias* (Cortázar, 1856, p. 60)

A continuación, se trabaja la reducción de números complejos a incomplejos y viceversa con todas ellas aportando gran variedad de ejemplos (Figura 5-44).

Ejemplos. 1.º Reducir 123489 onzas á complejo.

123489 *onzas*	16		
114	7718 *libras*	25	
028	0218	308 *arrobas*	4
129	18 *libras*	0 *arrobas*	77 *quintales*
01 *onza*			

Luego 123489 onzas = 77 quintales, 0 arrobas, 18 libras y 1 onza.

Figura 5-44. Ejemplo de reducción a número complejo en la *Aritmética práctica para uso de las escuelas primarias* (Cortázar, 1856, p. 62)

Como caso particular, se explica el procedimiento para “Valuar en maravedises un número de centésimas de real” (p. 64) y se aportan varios ejemplos con solución.

Enseguida se explican las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división de los números complejos. En la suma y en la resta se indica que ambos números deben colocarse “de manera que las especies iguales se hallen en línea vertical” (p. 65) y después se suman o se restan parcialmente “principiando por la especie inferior” (p. 66) (CCAP5) (Figura 5-45). Pero,

- si en la suma “resultan unidades de la inmediata superior, se guardan para sumarlas con los números de esta especie, y debajo se escribe le resto” (p. 65) y,
- si en la resta, uno de los sustraendos es mayor que su minuendo, “se añade á este una unidad de especie superior inmediata; y para que el resto no padezca alteracion, se añade otra unidad al sustraendo parcial siguiente” (p. 66).

EJEMPLOS.

1.º	123 *duros*	11 *reales*	14 $\frac{2}{3}$ *mrs*....	16
	49	18	23 $\frac{3}{4}$	18
	19	14	28 $\frac{5}{8}$	15
	118	29	17 $\frac{7}{12}$	11
	312	14	16 $\frac{5}{8}$	63 | 24
				13 | 2 $\frac{15}{24}$ = 2 $\frac{5}{8}$.

1.º	25 *varas*	1 *pié*	7 *pulgadas*	8 *líneas*
	14	2	4	11
	10	2	2	9

Esplicacion. Como de 8 líneas no se pueden restar 11 líneas, añado á 8 líneas 1 pulgada, que tiene 12 líneas, y entonces tendré 20 líneas, de las que restando 11 líneas, quedan 9 líneas. Añado ahora 1 pulgada al sustraendo parcial 4 pulgadas, y tendré 5 pulgadas, las cuales restadas de 7 pulgadas dan de resto 2 pulgadas. En la sustraccion de los piés nos hallamos con la misma dificultad; por lo que al minuendo 1 pié añadimos una vara que tiene 3 piés, y despues se añade una vara al sustraendo 14 varas.

Figura 5-45. Ejemplo de suma y resta de números complejos en la *Aritmética práctica para uso de las escuelas primarias* (Cortázar, 1856, pp. 65-66)

Para el caso de multiplicación de números complejos, se recomienda “reducir el multiplicador á incomplejo de la especie de la unidad cuyo valor es el multiplicando” (p. 67) (CCAP5). El caso de la división desde aborda desde dos casos diferentes:

- cuando el dividendo y el divisor son de la misma naturaleza, en el cual “se reducen ambos á una misma especie, y se parten después” (p. 69) y,
- cuando sean de diferente naturaleza, en el cual “se reduce el divisor á la especie de la unidad cuyo valor se quiere hallar; y el dividendo puede reducirse á una especie cualquiera, ó dejarle en su forma, si es complejo” (p. 70).

Tanto para la multiplicación como para la división se aportan numerosos ejemplos y problemas con solución (CCAP5).

Antes de pasar al siguiente capítulo, se explica “el método de las partes alícuotas en la multiplicación de números complejos” (p. 71) (Figura 5-46), que consiste en

> hallar en primer lugar el valor del número de la especie superior del multiplicador, y los valores de los números de las especies inferiores se hallan en seguida, descomponiendo estos números en partes alícuotas de otros números cuyos valores sean conocidos. (p. 71)

Ejemplo. 1 fanega vale 23 reales y 19 mrs., ¿cuánto valdrán 7 cahices, 9 fanegas y 9 celemines?

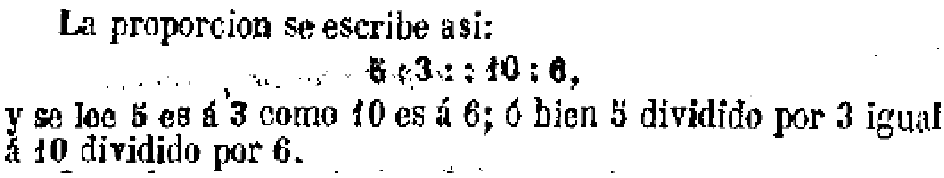
Como el multiplicando es valor de una fanega, la especie superior del multiplicador debe ser fanegas: el multiplicador será pues 93 fanegas y 9 celemines.

1 fanega.......	23 *reales*	19 *mrs*
	93 *fanegas*	9 *celemines.*
Valor de las 93 fanegas	279 186	837 93
Valor de 6 celemines....	11	$26\frac{1}{2}$
Valor de 5 celemines...	5	$30\frac{1}{4}$
	53	
	2208 *reales*	$21\frac{3}{4}$ *mrs.*

Despues de hallar el valor de las 93 fanegas, se hallará el de los 9 celemines, descomponiendo este número en 6 celemines, mitad de una fanega, y en 3 celemines, mitad de 6 celemines. Tambien se pueden descomponer los 9 celemines en $4+4+1$; y su valor se hallará escribiendo dos veces el valor de 4 celemines, tercio de una fanega, y despues el valor de 1 celemin, cuarta parte de 4 celemines.

Figura 5-46. Ejemplo de suma y resta de números complejos en la *Aritmética práctica para uso de las escuelas primarias* (Cortázar, 1856, p. 71)

El último capítulo trata de las proporciones, entendiendo por proporción “la reunion de cuatro números, tales que el cociente del primero dividido por el segundo es igual al cociente del tercero dividido por el cuarto” (p. 72) (CCAP6). Posteriormente se detallan los nombres de los términos de una proporción, así como la notación y la notación de estas (Figura 5-47) (CCAP6).



La proporcion se escribe asi:

5 : 3 : : 10 : 6,

y se lee 5 es á 3 como 10 es á 6; ó bien 5 dividido por 3 igual á 10 dividido por 6.

Figura 5-47. Notación y lectura de las proporciones en la *Aritmética práctica para uso de las escuelas primarias* (Cortázar, 1856, p. 71)

A continuación, se detallan los tipos de problemas que pueden ser resueltos mediante proporciones (CCAP6). Se clasifican en los siguientes:

- Problemas de reglas de tres. Aquellos en los que se relacionan cuatro cantidades, homogéneas dos a dos, las segundas son proporcionales a las primeras y una de ellas es la incógnita. Se distinguen dos casos:
    - Cuando “duplicando una de las primeras, su correspondiente se duplica tambien” (p. 73). Por ejemplo, “25 fanegas de trigo han costado 1183 reales: ¿cuánto costarán 73 fanegas del mismo trigo? (p. 74).
    - Si “duplicando una de las dos primeras, su correspondiente debe ser la mitad” (p. 73). Por ejemplo, “20 hombres hacen una obra en 36 días, ¿45 hombres en cuántos días harán una obra igual” (p. 74).
- Problemas para hallar el tanto por ciento y tanto por mil de una cantidad. Por ejemplo, “¿Cuánto es el 2 por 1000 de la cantidad 76893 reales? (p. 76).
- Problemas de interés simple. Aquellos en los que se calcula “la ganancia que produce un capital prestado con la condición de que 100 unidades de dinero produzcan al prestador una cierta cantidad al cabo de un año” (p. 76). Se distinguen dos casos:
    - Cuando “el tiempo en que el capital produce interés, es un año” (p. 77). Por ejemplo, “Hallar el capital que produce en un año 1200 reales de interés, á 5 por 100” (p. 77).
    - Cuando “este tiempo es diferente de un año” (p. 77). Por ejemplo, ¿Qué interés producen 20000 reales en 5 meses á 5 por 100 al año? (p. 77)
- Problemas de interés compuesto. Aquellos en los que se calcula la ganancia que produce una capital y los intereses ganados en los años anteriores con el mismo capital. Por ejemplo, “Calcular el interés compuesto que producen en 4 años 20000 reales al 5 por 100” (p. 78).

- Problemas de descuento. Aquellos en los que se calculan las variables involucradas en una operación de descuento de una letra, que consiste en "rebajar de su valor nominal un cierto tanto por 100, segun convenio entre el dueño de la letra y el tomador ó comprador de la misma (p. 79). Por ejemplo, "¿Qué rebaja ó descuento debe sufrir una letra de 20000 rs. que vence al fin de un año, siendo 6 el tanto por 100 de rebaja?" (p. 79).
- Problemas de cambios. Aquellos en los que se calculan las variables involucradas en una operación de cambio, "la cual consiste en entregar en un pueblo una cantidad de dinero y recibir su valor en otro pueblo" (p. 80). Por ejemplo, "Entregando 7000 reales á 2 por 100 de beneficio, ¿qué cantidad debe espresar la letra? (p. 81).
- Problemas de regla de compañía. Aquellos que hayan "la ganancia ó pérdida correspondiente al capital de cada uno de varios asociados, conociendo los capitales de estos, y la ganancia ó pérdida de todo el capital social" (p. 83). Por ejemplo, "Tres personas forman sociedad: la primera pone 4524 reales, la segunda 6245 reales, y la tercera 5438 reales; habiendo ganado 3684 reales, se quiere saber qué parte de esta ganancia corresponde a cada uno" (p. 83).
- Problemas de regla de aligación. Aquellos que resuelven "estos dos problemas:
  1º Conociendo las cantidades de diferente especie, que deben entrar en una mezcla, y sus precios respectivos, hallar el precio medio, ó precio de la mezcla.
  2º Conociendo el precio medio y los de las especies, hallar las cantidades de dichas especies que deben entrar en la mezcla" (p. 87).
  Por ejemplo, "Se han mezclado 25 fanegas de trigo de á 40 reales la fanega con 30 fanegas á 36 reales: averiguar lo que vale cada fanega de trigo mezclado" (p. 87).

En el capítulo dedicado al sistema métrico decimal, entendido como un sistema ordenado de medidas y pesas en el que "las unidades de una misma naturaleza son 10, 100, 1000 ó 10000 veces mayores ó menores que la unidad principal de cada clase" (p. 93), se listan las unidades usuales, los múltiplos y los divisores de las medidas longitudinales, superficiales, de peso y de capacidad para áridos y líquidos. Se incluyen también las equivalencias aproximadas (Figura 5-48) entre las unidades más usadas en Castilla y las establecidas en el sistema métrico decimal. Asimismo, se incluyen ejemplos y problemas con sus respectivas soluciones.

Equivalencias aproximadas entre las medidas mas usadas de longitud de Castilla y las métricas.

5 metros hacen..	6 varas.
50 kilómetros....	9 leguas.
7 centímetros....	3 pulgadas.
25 leguas de posta francesas.......	18 leguas españolas.

Figura 5-48. Equivalencias aproximadas entre las unidades más usadas en Castilla y las establecidas en el sistema métrico decimal en la *Aritmética práctica para uso de las escuelas primarias* (Cortázar, 1856, p. 94)

Por último, en la última parte del tratado se especifican las equivalencias exactas (Figura 5-49) entre las unidades más usadas en todas las provincias españolas y las establecidas en el sistema métrico decimal.

CASTILLA.

La vara tiene 0,835905 metros; *el metro* 1,196308 varas, ó 1 vara, 7 pulgadas y 0,805 líneas: *la libra* 0,460093 kilógramos; *el kilógramo* 2,173474 libras, ó 2 libras, 2 onzas y 12,409 adarmes: *la cántara ó arroba de vino* 16,133 litros; *el litro de vino* 1,983512 cuartillos, ó 1 cuartillo y 3,934 copas: *la arroba de aceite* 12,563 litros; *el litro de aceite* 1,989971 libras, ó 1 libra y 3,960 panillas: *la fanega de áridos* 55,501 litros; *el litro de grano* 0,864849 cuartillos ó 3,459 ochavillos: *la fanega superficial* 64,395617 áreas; *la área* 143,115329 varas cuadradas.

Figura 5-49. Equivalencias exactas entre las medidas usadas en Castilla y las del sistema métrico decimal en la *Aritmética práctica para uso de las escuelas primarias* (Cortázar, 1856, p. 97)

Se presenta un mapa conceptual (Figura 5-50) del contenido de la edición en el que se plasma el recorrido seguido, comenzando con las operaciones y propiedades de los números enteros, quebrados, cantidades decimales, la divisibilidad de los números enteros, el estudio de los números complejos e incomplejos y el estudio de las proporciones.

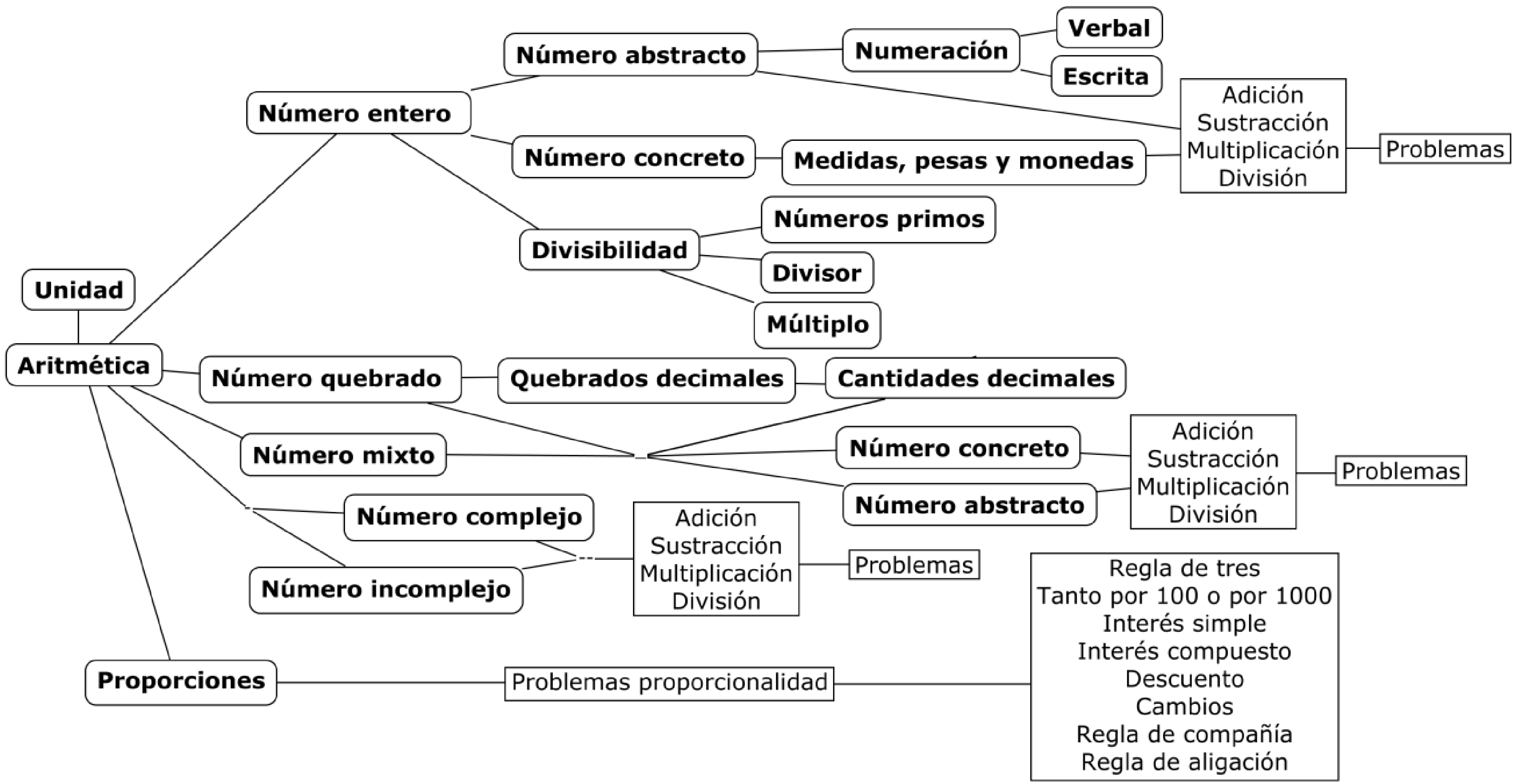


Figura 5-50. Mapa conceptual de la *Aritmética práctica para uso de las escuelas primarias* (1856)

Sistemas de representación

Se han localizado seis tipos de representaciones en el texto: el lenguaje verbal, representaciones numéricas, representaciones algebraicas, representaciones tabulares, gráficas de tipo geométrico y de notación algorítmica.

Se han localizado seis tipos de representaciones en el texto: el lenguaje verbal, representaciones numéricas, representaciones algebraicas, representaciones tabulares, gráficas de tipo geométrico y de notación algorítmica.

- El lenguaje verbal se usa para definir conceptos, enunciar propiedades y resultados, realizar demostraciones, proponer ejemplos, ejercicios y problemas, siempre apoyado por expresiones numéricas:

  > Todos sabemos lo que significa uno ó una. La reunión, ó el agregado, de uno y uno se llama dos, la de dos y uno tres, la de tres y uno cuatro, la de cuatro y uno cinco, la de cinco y uno seis, la de seis y uno siete, la de siete y uno ocho, la de ocho y uno nueve, la de nueve y uno diez. (p. 1)

- Para resolver problemas con proporciones en los que se debe despejar la incógnita, se usan representaciones algebraicas (Figura 5-51)

Dados tres términos de una proporcion, averiguar el cuarto término.

Si el término desconocido es un estremo de la proporcion, se hallará su valor multiplicando los medios, y partiendo el producto por el estremo conocido; y si es medio, se multiplican los estremos, y se parte el producto por el medio conocido.

Asi, de la proporcion

$$4 : 7 :: 21 : x\ (a),$$

resulta $x = \frac{21 \times 9}{4} = \frac{189}{4} = 47\frac{1}{4}$.

Figura 5-51. Representación algebraica en la *Aritmética práctica para uso de las escuelas primarias* (Cortázar, 1856, p. 72)

- Para aportar ejemplos sobre las diferentes operaciones y propiedades, se usan representaciones numéricas (Figura 5-52).

Asi, 10 y 4 son 14, 25 y 6 31, 43 y 9 52, 67 y 8 75, 82 y 9 91, 125 y 9 134, 224 y 7 231, 348 y 5 353, 796 y 8 804.

Figura 5-52. Representación numérica en la *Aritmética práctica para uso de las escuelas primarias* (Cortázar, 1856, p. 7)

- Se hallan representaciones tabulares, que incluyen las tablas de la adición, sustracción o multiplicación (Figura 5-53).

TABLA DE LA SUSTRACCION.

De 0 á 0..0	De 1 á 1..0	De 2 á 2..0	De 3 á 3..0	De 4 á 4..0
0 á 1..1	1 á 2..1	2 á 3..1	3 á 4..1	4 á 5..1
0 á 2..2	1 á 3..2	2 á 4..2	3 á 5..2	4 á 6..2
0 á 3..3	1 á 4..3	2 á 5..3	3 á 6..3	4 á 7..3
0 á 4..4	1 á 5..4	2 á 6..4	3 á 7..4	4 á 8..4
0 á 5..5	1 á 6..5	2 á 7..5	3 á 8..5	4 á 9..5
0 á 6..6	1 á 7..6	2 á 8..6	3 á 9..6	4 á 10..6
0 á 7..7	1 á 8..7	2 á 9..7	3 á 10..7	4 á 11..7
0 á 8..8	1 á 9..8	2 á 10..8	3 á 11..8	4 á 12..8
0 á 9..9	1 á 10..9	2 á 11..9	3 á 12..9	4 á 13..9
De 5 á 5..0	De 6 á 6..0	De 7 á 7..0	De 8 á 8..0	De 9 á 9..0
5 á 6..1	6 á 7..1	7 á 8..1	8 á 9..1	9 á 10..1
5 á 7..2	6 á 8..2	7 á 9..2	8 á 10..2	9 á 11..2
5 á 8..3	6 á 9..3	7 á 10..3	8 á 11..3	9 á 12..3
5 á 9..4	6 á 10..4	7 á 11..4	8 á 12..4	9 á 13..4
5 á 10..5	6 á 11..5	7 á 12..5	8 á 13..5	9 á 14..5
5 á 11..6	6 á 12..6	7 á 13..6	8 á 14..6	9 á 15..6
5 á 12..7	6 á 13..7	7 á 14..7	8 á 15..7	9 á 16..7
5 á 13..8	6 á 14..8	7 á 15..8	8 á 16..8	9 á 17..8
5 á 14..9	6 á 15..9	7 á 16..9	8 á 17..9	9 á 18..9

Figura 5-53. Representación tabular en la *Aritmética práctica para uso de las escuelas primarias* (Cortázar, 1856, p. 11)

- Las representaciones gráficas de tipo geométrico se usan para definir intuitivamente el concepto de número cuadrado (Figura 5-54).

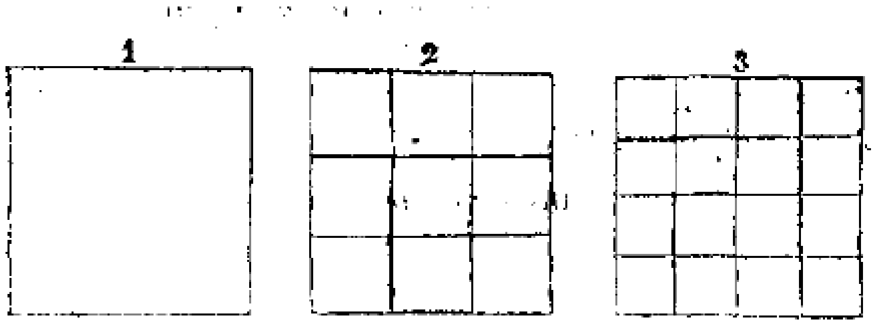


Figura 5-54. Representación gráfica en la *Aritmética práctica para uso de las escuelas primarias* (Cortázar, 1851, p. 21)

- Por último, se incluyen representaciones de notación algorítmica para apoyar los pasos que se siguen en la resolución de ejercicios y problemas (Figura 5-55)

3.° Sumar los quebrados $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$ y $\frac{5}{8}$.

OPERACIÓN.

$^1/_2$ 12
$^3/_4$ 18
$^2/_3$ 16
$^5/_8$ 15

61	24
13	$2\frac{13}{24}$ ..... Suma.

Figura 5-55. Representación de notación algorítmica para resolver la suma de quebrados en la *Aritmética práctica para uso de las escuelas primarias* (Cortázar, 1851, p. 42)

Fenomenología

Se han encontrado catorce tipos de fenómenos o contextos: fenómenos de desplazamientos, cronológicos, de superficies, de capacidades, de masas, de longitudes, poblacionales, laborales, financieros, comerciales, de transmisión, de equivalencias entre medidas monedas, y de tipo estrictamente matemático, tanto aritméticos como geométricos.

Debido al carácter teórico-práctico de la obra, los diferentes fenómenos se intercalan entre ejercicios y ejemplos estrictamente matemáticos. Se manifiestan de tipo aritmético y geométrico:

- Aritmético: aquellas situaciones en las que deben resolverse ejercicios y problemas de tipo aritmético (Figura 5-56)

Ejemplos. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{5}{4}=1\frac{1}{4}$,
$\frac{1}{2}+\frac{7}{8}=\frac{11}{8}=1\frac{3}{8}$, $\frac{3}{4}+\frac{9}{16}=\frac{21}{16}=1\frac{5}{16}$.

Figura 5-56. Fenómeno aritmético en la *Aritmética práctica para uso de las escuelas primarias* (Cortázar, 1856, p. 43)

- Geométrico: aquellas situaciones en las que deben resolverse ejercicios y problemas de tipo geométrico (Figura 5-57)

Para hallar el número de cuadrados menores que contiene un cuadrado mayor, se multiplica por sí mismo el número de veces que el lado del cuadrado mayor contiene al del menor.

Figura 5-57. Fenómeno geométrico en la *Aritmética práctica para uso de las escuelas primarias* (Cortázar, 1856, p. 22)

Por otro lado, en la obra se hallan contextos en los que hay que resolver problemas de situaciones que se encuentran en la naturaleza y se rigen mediante leyes físicas. Encontramos de seis tipos:

- Desplazamientos: aquellas en las que debemos calcular distancias, velocidades y tiempos de recorrido de un móvil. Por ejemplo, “Una máquina locomotriz ha corrido en 17 horas 136 leguas, ¿cuál ha sido su VELOCIDAD, es decir, el número de leguas que ha andado por hora? (p. 33).
- Longitudes: aquellas situaciones en las que se debe calcular una determinada longitud. Por ejemplo, “El radio que va desde el centro de la tierra al polo tiene

7.604121 varas, y el radio del ecuador 7.628839 varas; ¿cuál es la diferencia de estos rádios ó el APLANAMIENTO de la tierra? (p. 13).

- Superficies: aquellas situaciones en las que se debe medir la superficie de un cuerpo. Por ejemplo, "El círculo tiene 360 grados; cada grado del círculo máximo de la tierra tiene 20 leguas. ¿Cuántas leguas tiene el círculo máximo de la tierra? (p. 23).
- Capacidades: aquellas en las que debemos analizar el llenado o vaciado de productos o sustancias en recipientes. Por ejemplo, "Una fuente arroja $3\frac{1}{2}$ cuartillos de agua en cada minuto; ¿en cuántos minutos llenará una vasija de $35\frac{3}{4}$ cuartillos de cabida? (p. 51).
- Masas: aquellos en los que debemos calcular el peso de uno o varios cuerpos. Por ejemplo, "Una fanega de trigo pesa $3\ \frac{3}{5}$ arrobas, ¿cuánto pesarán $75\ \frac{3}{4}$ fanegas" (p. 49).
- Cronológicos: aquellas situaciones en las que debemos estudiar la evolución de uno o más sucesos. Por ejemplo, "Asuncion Cortázar y la Rubia, hija del autor de este libro, nació el dia 11 de Agosto de 1845, y falleció el día 13 de Mayo de 1855. ¿Qué edad tenia el dia de su fallecimiento? (p. 67)

Aquellas situaciones que son consecuencia del comportamiento humano, las denominamos situaciones sociales. Entre ellas, encontramos de cinco tipos:

- Comerciales: aquellos que se refieren a situaciones en las que hay implicadas operaciones de compra-venta. Por ejemplo, "Se compra una pieza de lienzo que tiene 53 varas á 7 reales la vara, y se entrega en pago un billete de 500 reales. ¿Cuánto tiene que devolver el comerciante?" (p. 23).
- Laborales: aquellos que se refieren a situaciones en las que se debe calcular el salario a percibir por una o varias personas. Por ejemplo, "Un empleado cobra mensualmente 700 reales, ¿cuál es su sueldo anual?" (p. 23).
- Financieros: aquellos en los que se presentan situaciones en las que se debe determinar una ganancia o una pérdida económica. Por ejemplo, "Una finca produce anualmente 27683 rs.; los gastos que ocasiona, ascienden á 7804 rs.; ¿cuál es la renta líquida que produce dicha finca?" (p. 13).

- De transmisión: aquellas situaciones que implican un reparto o cesión de dinero. Por ejemplo, "Un padre deja al morir 74634 duros para repartir por partes iguales entre sus 7 hijos; ¿cuál es la herencia de cada uno de los hijos? (p. 33).
- Poblacionales: aquellas situaciones en las que debemos estudiar la evolución de la población de una comunidad. Por ejemplo, "Averiguar cuánta es toda la población de la tierra, sabiendo que la de Europa tiene 168.000000 de habitantes, Asia 580.000000, Africa 92.000000, América 150.000000, y la de Oceanía 10.600000" (p. 9)

Igualmente encontramos fenómenos que implican el cálculo de la equivalencia entre una unidad de medida y otra, como, por ejemplo, "¿Cuántos pies cuadrados tiene una vara cuadrada?" (p. 22).

Estrategias didácticas

Sin perder precisión y rigurosidad, Cortázar elimina las demostraciones de los teoremas y resultados, y usa un lenguaje coloquial y accesible a los alumnos a los que la obra está dirigida (RP).

> Siendo el objeto de este libro la práctica de la aritmética, y estando destinado principalmente á la infancia, he debido abstenerme de demostraciones, esceptuando (con objeto de parar algun tanto la imaginacion vagabunda de los niños) tal ó cual proposicion, de las que doy demostraciones muy sencillas, que no dudo, serán comprendidas, por lo menos, con la ayuda del profesor. (p. III)

Elige con cuidado los contenidos que van a formar parte del tratado, teniendo en cuenta el público al que va dirigido (SCO),

> Esplico el sistema de las medidas y pesas mas generalizadas de España, ó llámense de Castilla, y las monedas; y tambien las unidades cuadradas ó superficiales, anteponiendo a definicion intuitiva de cuadrado, la definicion ordinaria de unidades cuadradas; y la regla para hallar el número de cuadrados menores que contiene un cuadrado mayor: no he creido conveniente ocuparme de las unidades cúbicas, porque estas no ocurren sino en cuestiones cientificas, y es materia propia de la segunda enseñanza. (p. III)

Cortázar idea un sistema interesante e innovador para que los lectores asimilen y sean capaces de usar de manera eficaz el nuevo sistema métrico, que el Reino estaba intentando implantar desde hacía algunas décadas. El anexo del tratado detalla las correspondencias entre las medidas de las diferentes provincias de España, que el mismo Cortázar considera que se trata de un "sistema cómodo para la reduccion de un número cualquiera de unidades antiguas á su equivalente en unidades modernas, y al contrario” (pp. III-IV) (SPM).

A lo largo del tratado podemos encontrar diversas sugerencias que ayudan al alumno al estudio de la aritmética, por ejemplo, se recomienda la memorización de las tablas de la suma, resta y multiplicación de un número cualquiera con otro de una cifra, para después poder hacer un uso eficaz de los algoritmos de la adición, sustracción y producto (SPM).

Al igual que el *Tratado de Aritmética*, en la obra destaca el uso de diferentes y cuantiosas situaciones y contextos en las que ubicar los enunciados de ejercicios y problemas resueltos, llevando los resultados matemáticos teóricos a la aplicación práctica de problemas que pueden surgir en la vida cotidiana (APL).

Conclusiones

La *Aritmética práctica*, el único texto destinado a alumnos de educación primaria que forma parte de la obra de Cortázar. Se caracteriza por su lenguaje coloquial y la ausencia de la mayoría de demostraciones en los resultados y teoremas, pero sin perder la formalidad que identifica al autor.

El rico empleo de contextos y situaciones en problemas asociados a la vida cotidiana, sobre todo en el ámbito natural o físico y social, la convierte en una obra de gran aplicabilidad pues como él mismo señala “[…] haciendo notar la utilidad de muchos de nuestros problemas, por los conocimientos que suministran, independientemente de su aplicacion aritmética” (p. IV). Sin embargo, debido a que el texto está destinado a los alumnos de la primera enseñanza, no incluye fenómenos matemáticos algebraicos ni geométricos, en contraposición con el *Tratado de Aritmética*.

Se trata asimismo de un medio de difusión del nuevo sistema métrico decimal, que no solo incluye la exposición de las nuevas, sino que establece las relaciones aproximadas y exactas entre las antiguas y las nuevas medidas, cumpliendo un doble objetivo: facilitar el cálculo de las equivalencias entre un sistema a otro y con ello, fomentar la unificación del nuevo sistema.

5.3. Obra: *Tratado de Álgebra elemental*

5.3.1. Caracterización de la obra

El *Tratado de Álgebra elemental* (CO1) se editó por primera vez en 1848 y por última en 1919, fue reeditado en 40 ocasiones, y aprobado como libro de texto para la enseñanza en secundaria en el año 1848 (Gaceta de Madrid de 15 de septiembre de 1848) (CO2, CO3 y CO5). Fue también utilizado como libro de texto de la asignatura de Álgebra, que se cursaba en la facultad de Ciencias de la Universidad Central desde 1857 (CO5).

Irueste (1912) realiza un análisis de las últimas ediciones, en el que destaca algunos de los capítulos del *Tratado de Álgebra elemental* por la sencillez del *"*procedimiento pedagógico" empleado. También resalta dos notas situadas en la parte final del tratado, una sobre resolución de ecuaciones de segundo grado y otra sobre determinantes. Ésta última nota la encontramos por primera vez, entre las ediciones a las que hemos tenido acceso, en la vigésimo octava edición. Se trata de la primera vez que aparece en España en un tratado de este tipo. La nota sobre la resolución de las ecuaciones de segundo grado no se añadiría hasta al menos la edición número cinco, publicada en el año 1852 (CO6).

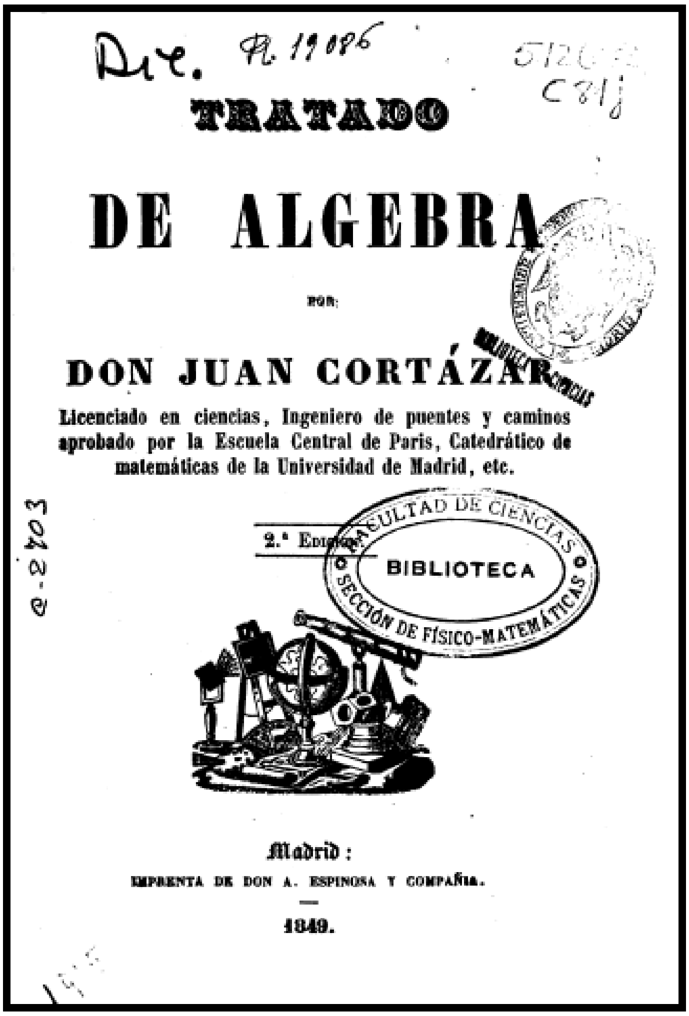
La opinión de Irueste coincide con la de Vea (1995), en considerar que el contenido de la obra "se ajusta a las pautas comunes a la mayoría de los textos de la época" (pp. 429). Además, resalta capítulos de especial originalidad como el cociente de un número entre cero, la indeterminación cero entre cero, el tratamiento meticuloso de la radicación de monomios y polinomios, sobre todo en el caso de las raíces imaginarias, la resolución de ecuaciones de grado superior al primero o los conceptos de máximo y mínimo. El tratamiento dado a las progresiones y los logaritmos coincide con el que se le da en la actualidad y, es que Cortázar considera que los logaritmos deben ser incluidos dentro del álgebra y no dentro de la aritmética como lo hacen Bourdon o Fernández Vallín. Como aspecto negativo, Vea destaca el tratamiento que Cortázar da a los problemas de primer grado con resultado negativo debido a que la postura de rechazo del autor hacia tales problemas se contradice, según este, con la originalidad y variedad de su tratado (CO6).

El análisis comparativo realizado por Peset et al. (1978) entre el *Manuel des aspirants* y los *Elementos de Álgebra* de M. Bourdon, ambos, libros de texto franceses contemporáneos a este tratado, nos revela que el nivel científico del autor español es inferior que el de los franceses, si bien ha de tenerse en cuenta el contexto histórico en el que nuestro autor redacta su obra. Además, consideran que el texto matemático está escrito de forma esquemática, al contrario de lo que sucede en los textos franceses de la época, que califican como deductivos (CO6).

5.3.2. Caracterización de las ediciones

5.3.2.1. Periodo 2 (1845-1857): Segunda edición

En este caso analizaremos la segunda edición, la más antigua a la que hemos tenido acceso. Esta edición fue impresa en Madrid en el año 1849 por la Imprenta de Don A. Espinosa y Cía (CE2, CE3 y CE4). El ejemplar utilizado en este trabajo forma parte de la biblioteca de la Universidad Complutense de Madrid y que ha llegado hasta nosotros a través de repositorios digitales. Esta edición se tituló *Tratado de Álgebra* (CE1), y fue publicada junto con el *Tratado de Álgebra superior*. En el prólogo reza la advertencia: "En esta segunda edición del álgebra he modificado el libro primero, presentándolo de un modo más al alcance de los jóvenes que en la primera; los otros libros del álgebra elemental han recibido también algunas mejoras" (CE6).


TRATADO

DE ALGEBRA

POR

DON JUAN CORTÁZAR,

Licenciado en ciencias, Ingeniero de puentes y caminos aprobado por la Escuela Central de Paris, Catedrático de matemáticas de la Universidad de Madrid, etc.

2.ª Edicion.

Madrid:

IMPRENTA DE DON A. ESPINOSA Y COMPAÑÍA.

1849.

Figura 5-58. Portada del *Tratado de Álgebra* (Cortázar, 1849)

Está formado por un solo tomo de 208 páginas, organizado en 6 libros, éstos a su vez divididos en 31 capítulos, los cuales, a su vez están divididos en artículos. Los 6 libros están dedicados respectivamente al cálculo algébrico, las ecuaciones de primer grado, los problemas determinados de primer grado, las potencias y raíces de las cantidades algebraicas, las ecuaciones de segundo grado y los logaritmos y progresiones (Tabla 5-3) (CE5).

La obra usa un lenguaje formal, estrictamente matemático y está constituida por definiciones, teoremas con sus respectivas demostraciones, corolarios, métodos de resolución algebraicos y ejemplos variados para mostrarlos. En ella se intercalan diferentes capítulos dedicados a resolver problemas mediante ecuaciones de primer y segundo grado. No obstante, el autor intercala gran variedad de notas y sugerencias, que ayudan al lector, tanto a aclarar ciertos conceptos de más dificultad, como a disponer de ciertas estrategias de cálculo (CE5).

Tabla 5-3. *Índice del Tratado de Álgebra elemental de Juan Cortázar, 1849.*

LIBRO 1º - Cálculo algébrico	Págs. 1-47
Nociones preliminares-Operaciones con los números negativos: adición, sustracción, multiplicación, división, ventaja de la admisión de las cantidades negativas y valores numéricos de las cantidades literales- Operaciones fundamentales: adición de las cantidades literales, sustracción de las cantidades literales, multiplicación de las cantidades literales y división de las cantidades literales- Fracciones algébricas- Exponentes negativos. Interpretación de las expresiones $\frac{a}{0}$ y $\frac{0}{0}$.	
LIBRO 2º - Ecuaciones de primer grado	Págs. 48-78
Nociones preliminares- Resolución de las ecuaciones de primer grado con una incógnita- Eliminación de una incógnita entre dos ecuaciones de primer grado con dos o más incógnitas- Resolución de un número cualquiera de ecuaciones de primer grado con igual número de incógnitas: ecuaciones numéricas y ecuaciones literales- Casos de imposibilidad e indeterminación en las ecuaciones de primer grado. Discusión de las fórmulas generales de las ecuaciones de primer grado: ecuación numérica con una incógnita, ecuación literal con una incógnita, dos o más ecuaciones numéricas con igual número de incógnitas y dos o más ecuaciones literales con igual número de incógnitas- Resolución de un cierto número de ecuaciones de primer grado con mayor número de incógnitas- Resolución de varias ecuaciones de primer grado con menor número de incógnitas.	
LIBRO 3º - Problemas determinados de primer grado	Págs. 79- 103
Nociones preliminares- Problemas particulares de primer grado con una incógnita- Problemas particulares de primer grado con dos o más incógnitas- Problemas generales- Casos de imposibilidad en los problemas de primer grado. Valores negativos de las incógnitas.	
LIBRO 4º - Potencias y raíces de las cantidades algébricas	Págs. 104- 138
Potencias y raíces de los monomios: potencias de los monomios y raíces de los monomios- Potencias y raíces de los polinomios: permutaciones y combinaciones, fórmula del binomio de Newton, potencias de los polinomios, raíces de los polinomios- Cálculo de las cantidades radicales: cantidades radicales reales,	

exponentes radicales reales, exponentes fraccionarios y cálculo de las cantidades imaginarias de segundo grado.

LIBRO 5º - Ecuaciones de segundo grado Págs. 139-170

Ecuaciones de segundo grado con una incógnita: ecuaciones incompletas de segundo grado y ecuación completa de segundo grado- Ecuaciones bicuadradas- Resolución de dos ecuaciones que no pasan del segundo grado, cada una con dos incógnitas- Discusión de la ecuación general de segundo grado- Problemas de segundo grado- Cuestiones sobre máximos y mínimos que pueden resolverse por las ecuaciones de segundo grado- Resolución de las ecuaciones de dos términos. Valores de los radicales.

LIBRO 6º - Logaritmos y progresiones Págs. 171-208

Algunas propiedades de las potencias y raíces de los números- Logaritmos: propiedades generales de los logaritmos, construcción de las tablas de logaritmos, operaciones por medio de logaritmo, propiedades particulares de los logaritmos ordinarios, uso de tablas y ecuaciones exponenciales- Progresiones: progresiones por diferencia o aritméticas, progresiones por cociente o geométricas, progresiones geométricas decrecientes y continuadas al infinito y pilas de balas- Intereses, anualidades y rentas vitalicias.

En numerosas ocasiones, a lo largo de la obra, el autor utiliza el símbolo asterisco, que, en otros de sus tratados, distinguen los apartados que los profesores de secundaria deben eliminar en sus clases. Al contrario que en las otras ocasiones, no aparece nota aclaratoria de su significado (CE8).

Con respecto a las referencias de otros autores en la obra, se encuentran pocas. Entre ellas, cita a Bezout y su método de eliminación de una de las incógnitas cuando se trabaja con varias ecuaciones y varias incógnitas, denominado método de las indeterminadas, a Descartes para establecer su principio sobre las ecuaciones que se plantean para la resolución de problemas, a Neper, Briggs, Lalande y M. Marie como inventores y constructores de las tablas de logaritmos y a Duvillard y su tabla de probabilidad de la vida humana en Francia. Sin embargo, hallamos continuas referencias a su *Tratado de Aritmética* siempre que el autor necesita ampliar información o usar un concepto o resultado previo (CE7).

Estructura conceptual

Utilizando metodología inductiva, el tratado comienza con el planteamiento de un problema que resuelve aritméticamente, para después deducir un resultado general. De esta forma, el autor concluye: “Acabamos de ver que por medio del lenguaje simbólico o razonamiento artificial se simplifica mucho la resolución de los problemas. Este lenguaje simbólico o razonamiento artificial, aplicado a la resolución de los problemas matemáticos, se llama *álgebra*” (p. 5) (CCAE1).

Al inicio, el autor indica la notación algebraica que se usará en toda la obra: “Además de los signos +, - , x, etc., conocidos ya, se usan en el álgebra ordinariamente las letras *x, y, z,* etc., para representar las incógnitas, y las letras *a, b, c,* etc., para representar los datos generales” (p. 3) (CCAE3). Asimismo, recuerda, haciendo referencia al *Tratado de Aritmética*, cómo ha de indicarse el producto de varias cantidades literales, el producto de una cantidad literal por una numérica, la potencia de una cantidad y la raíz de índice m.

Cabe destacar que en la obra se distingue entre:

- cantidad radical o irracional, como aquella cantidad que es “la raíz indicada de una cantidad” (p. 4) (CCAE1),
- cantidad racional (Figura 5-59) (CCAE1),

Por el contrario toda cantidad en que no entre el signo $\sqrt{\ }$ se llama cantidad *racional*.

Figura 5-59. Cantidad racional en el *Tratado de Álgebra* (Cortázar, 1849, p.4)

- cantidad entera, como aquella “que, además de ser racional, no contiene ningún denominador” (p. 4) (CCAE1) y
- cantidad o expresión algebraica como “una reunión cualquiera de letras ligadas por medio de los signos de las operaciones ordinarias” (p. 6) (CCAE1).

Se definen de forma conjunta, los conceptos de igualdad o identidad, y ecuación; en ambos casos como reunión de cantidades por medio del signo igual, pero en el caso de la igualdad, las dos expresiones a ambos lados del operador igual son siempre iguales, mientras que en ecuación son, en general, diferentes, salvo para el valor o valores a determinar de las incógnitas. Se resalta en el texto, la conveniencia de considerar la incógnita de una ecuación como representante de un número tanto positivo como negativo, para que la misma ecuación ofrezca todas las soluciones de un problema, sean positivas o negativas (CCAE1).

Es por ello que dedica el resto del capítulo II del libro primero a las operaciones y propiedades de los números positivos y negativos. Así, “Un número solo, precedido del signo -, se llama cantidad negativa ó número negativo” (p. 6). También define la suma de varios números, positivos o negativos, como “el polinomio numérico que resulta juntando dichos números con los signos que tienen. […] La suma de los números –6, –8 y –9, será –6–8–9= –23” (p. 7) (CCAE2).

A continuación, define sustracción de números positivos o negativos, como (CCAE2):

> otro número que sumado con el sustraendo da de suma el minuendo. […] supongamos que del número 5 se quiera restar el número -4: la diferencia indicada será 5– (–4) […] luego será en este caso 5+4; pues sumando 5+4 con el sustraendo -4, resulta 5+4–4=5. (p. 8)

Para el caso de la multiplicación, el autor recuerda la definición general dada en el *Tratado de Aritmética* y para los números negativos, distingue cuatro casos: el producto de dos cantidades positivas, el producto de un número negativo por un número positivo, el producto de un número positivo por otro negativo y el producto de dos números negativos. Esto le lleva a abreviar el resultado, enunciando que “+ por + da +; – por + da –; + por – da –, y – por – da +” (p. 10) (CCAE2).

Análogamente define la división de números negativos (Figura 5-60) (CCAE2).

15. Se llama *cociente* de dos números un tercer número, que multiplicado por el divisor, da de producto el dividendo.

Esta definicion es la misma que la del cociente de dos números absolutos.

Segun la definicion, si llamamos c al cociente de los dos números absolutos a y b, tendremos

$$\frac{a}{b}=c,\ \frac{-a}{b}=-c,\ \frac{a}{-b}=-c,\ \frac{-a}{-b}=c.$$

Luego el *cociente de dos cantidades del mismo signo es positivo, y el de dos cantidades de diferente signo es negativo;* ó usando un lenguaje abreviado: $+$ partido por $+$ da $+$; $-$ partido por $+$ da $-$; $+$ partido por $-$ da $-$, y $-$ partido por $-$ da $+$.

Figura 5-60. División de números positivos y negativos en el *Tratado de Álgebra* (Cortázar, 1849, p. 10)

Tras definir todos los conceptos relativos al cálculo de expresiones algebraicas, el libro desarrolla las operaciones de monomios, polinomios y fracciones algebraicas comenzando por la reducción a términos semejantes. Así “para reducir dos términos semejantes, que tienen el mismo signo, á uno solo, se suman los coeficientes, y al resultado se antepone el signo común” (p. 14) (Figura 5-61) (CCAE3).

Ejemplo. $5ab^2-8ab^2+6ab^2+9ab^2-8ab^2$.

Diré $5ab^2-8ab^2=-3ab^2, -3ab^2+6ab^2=3ab^2, 3ab^2+9ab^2=12ab^2, 12ab^2-8ab^2=4ab^2$; ó bien, $5ab^2+6ab^2+9ab^2=20ab^2$, $-8ab^2-8ab^2=-16ab^2$, $20ab^2-16ab^2=4ab^2$.

Figura 5-61. Reducción a términos semejantes en el *Tratado de Álgebra* (Cortázar, 1849, p. 15)

Continúa definiendo la suma algebraica como “el polinomio que resulta juntando dichos monomios con los signos que tienen” (p. 15) y aporta el ejemplo de la Figura 5-62 (CCAE3).

Ejemplo. **Hallar la suma de los polinomios** $4a^2b-5ab^2+8b^3-a^3, 6a^3+9a^2b-5b^3, a^2b+5ab^2$

Disposicion de esta operacion.

$$\begin{array}{l} 4a^2b-5ab^2+8b^3-a^3 \\ 6a^3+9a^2b-5b^3 \\ \ a^2b+5ab^2. \\ \hline \end{array}$$

Suma. $4a^2b-5ab^2+8b^3-a^3+6a^3+9a^2b-5b^3+a^2b+5ab^2$;
ó reduciendo términos semejantes, $14a^2b+3b^3+5a^3$.

*Figura 5-62.*Ejemplo de adición de cantidades algebraicas en el *Tratado de Álgebra* (Cortázar, 1849, p. 16)

Análogamente, define la sustracción de cantidades literales (Figura 5-63), no sin antes demostrar que “siempre que se ponga el signo – delante de un paréntesis, se mudarán los signos á los términos que se escriban dentro; ó bien, cuando se quiera mudar los signos á varios términos de un polinomio, sin que este se altere, se escribirán dichos términos con los signos mudados dentro de un paréntesis, y se antepondrá al paréntesis el signo -” (p. 17) (CCAE3).

Disposicion de esta operacion.

$$\begin{array}{ll} & 14a^2b-5ab^2+8b^3-a^3 \\ & \ 6a^3+9a^2b-5b^3 \\ \hline \textit{Resto}\ldots\ldots\ldots\ldots & 14a^2b-5ab^2+8b^3-a^3-6a^3-9a^2b+5b^3, \end{array}$$

ó, efectuando la reduccion, $5a^2b-5ab^2+13b^3-7a^3$.

Figura 5-63. Ejemplo de sustracción de cantidades algebraicas en el *Tratado de Álgebra* (Cortázar, 1849, p. 17)

Para el producto de varias cantidades literales, definido como la “espresion cuyo valor numérico es siempre igual al producto de los valores numéricos de los factores” (pp. 18) (CCAE3), distingue entre el producto de monomios, el de un monomio por un polinomio y el de polinomios. Estos resultados le llevan a deducir que, “cuando un número sea factor comun á varios términos de un polinomio, se podrá escribir dicho factor comun fuera de un paréntesis y dentro los números por quienes está multiplicado” (p. 22) (CCAE3). Propone, además, dos notaciones para el resultado anterior (Figura 5-64) (CCAE3).

Asi, $a^2x-b^2x+c^2x+a^2b$, se podra escribir:

$$(a^2-b^2+c^2)x+a^2b\,,$$

ó, de otro modo,

$$\left.\begin{array}{r} a^2 \\ -b^2 \\ +c^2 \end{array}\right| x+a^2b.$$

Figura 5-64. Notación para sacar factor común en el *Tratado de Álgebra* (Cortázar, 1849, p. 22)

Como consecuencia de la multiplicación de polinomios, enuncia y demuestra el cuadrado y el cubo de la suma y la diferencia de dos cantidades, además del producto de la suma y la resta de dos cantidades.

A continuación, define el cociente de dos cantidades como “otra cantidad que multiplicada por el divisor da de producto el dividendo” (p. 26) (CCAE3), lo que le lleva también a la definición de fracción algebraica como “el cociente indicado de dos espresiones algebraicas” (p. 26) (CCAE3). Continúa explicando y aportando ejemplos de la división exacta e inexacta de monomios y polinomios (Figura 5-65) (CCAE3).

Ejemplo.

$$\begin{array}{r|l}
5x^4+9x^3-6x^2-8x+9 & x^2-4x+1 \\
+20x^3-5x^2 & \\
\hline
29x^3-11x^2-8x+9 & 5x^2+29x+105+\dfrac{383x-96}{x^2-4x+1} \\
+116x^2-29x & \\
\hline
105x^2-37x+9 & \\
+420x-105 & \\
\hline
383x-96 &
\end{array}$$

Figura 5-65. Ejemplo de división en el *Tratado de Álgebra* (Cortázar, 1849, p. 35)

Todo lo anterior le lleva a dar la definición de fracción literal o algebraica como “el cociente indicado de dos espresiones literales, las cuales pueden representar números enteros, fraccionarios ó incomensurables” (p. 58) (CCAE3), y enuncia y demuestra los resultados previos necesarios para explicar las operaciones con fracciones algebraicas.

Clasifica la suma y la resta de quebrados literales tanto en aquellos de igual denominador como en los que no lo tienen (Figura 5-66) (CCAE3) e indica que para dividir dos quebrados "se multiplica el primero por el segundo invertido" (p. 41) (CCAE3).

Ejemplos.

1.° $a+b+\frac{a-b}{2}=\frac{2a+2b+a-b}{2}=\frac{3a+b}{2}$.

2.° $c+d-\frac{a^2-d^2-c^2}{c-d}=\frac{c^2-d^2-a^2+d^2+c^2}{c-d}=\frac{2c^2-a^2}{c-d}$.

Figura 5-66. Ejemplos de sumas y restas de fracciones algebraica en el *Tratado de Álgebra* (Cortázar, 1849, p. 42)

El último artículo del libro primero, llamado *Interpretación de las expresiones* $\frac{a}{0}$ *y* $\frac{0}{0}$, incluye tres proposiciones de las cuales se obtienen cinco resultados. Para deducir el resultado de la expresión $\frac{a}{0}$, Cortázar recurre a la idea intuitiva de ∞ estudiando la tendencia de la fracción $\frac{a}{b}$ cuando b toma un valor de la forma $\frac{1}{10^n}$, para comprobar que su valor es infinitamente grande conforme el valor de b aumenta. Como consecuencia, se puede demostrar que $\frac{a}{\infty}$ tendrá un valor de cero.

El segundo resultado estudia el valor de la fracción $\frac{0}{0}$, demostrando primero que es un valor indeterminado por ser la solución de la ecuación $a \cdot 0 = 0$. Desde este punto y haciendo uso de cuatro ejemplos, elegidos específicamente para ello, demuestra cómo calcular el valor numérico de fracciones algebraicas cuando el resultado queda en términos de $\frac{0}{0}$.

El libro segundo está dedicado a las ecuaciones de primer grado, que son definidas como aquellas ecuaciones "en que el mayor esponente de la incógnita es 1, no hallándose la incógnita en ningun denominador, ni bajo ningun radical" (p. 53). Comienza distinguiendo genéricamente entre ecuación numérica y literal. Para ello, define ecuación numérica como aquellas en las que "todas las cantidades conocidas que entran en ella son números particulares" (p. 48) y, ecuación literal, como aquellas en las que "una ó mas de dichas cantidades conocidas están representadas por letras" (p. 48).

Establece cinco pasos para resolver las ecuaciones con una incógnita: “quitando denominadores, efectuando las operaciones indicadas, haciendo la transposicion y la reduccion, es claro que la ecuación de primer grado con una incógnita tendrá la forma ax=b; de donde resulta x=b/a” (p.53) (CCAE5). El procedimiento usado para eliminar denominadores consiste en multiplicar cada numerador por el producto de todos los denominadores a excepción del término con el que estemos trabajando, aunque dedica un ejemplo a explicar que cuando varios denominadores comparten factores comunes, se puede elegir el múltiplo menor a todos para multiplicarlo por todos los numeradores.

Tras ofrecer numerosos ejemplos de cada uno de los pasos que deben seguirse para resolver una ecuación de primer grado, propone algunos con su solución correspondiente, pero sin el procedimiento resuelto, para que los alumnos los resuelvan, e instándoles a comprobar la solución obtenida al finalizar el ejercicio y así evitar que se hayan cometido errores (Figura 5-67) (CCAE5).

2.° $$\frac{a(x-g)}{b}-\frac{c(x-d)}{f}-1=h-\frac{x-c}{bf},$$
$$x=\frac{afg+bfh+c-bcd+bf}{af-bc+1}.$$

3.° $$6abx-9bcd=12bdx+15abc,$$
$$x=\frac{5ac+3dc}{2a-4c}.$$

4.° $$4x+9=7x+1\,; \qquad x=\frac{8}{3}.$$

5.° $$\frac{5x}{2}-\frac{4x}{3}-15=\frac{5}{8}+\frac{x}{32}.$$
$$x=12.$$

Figura 5-67. Ejemplos de ejercicios propuestos en el *Tratado de Álgebra* (Cortázar, 1849, p. 54)

En los casos de resolución de dos o más ecuaciones con dos o más incógnitas, Cortázar desarrolla los métodos de eliminación de una incógnita entre las ecuaciones, es decir, “deducir de ellas otra ecuación que no contenga á dicha incógnita” (p. 55) mediante los métodos de sustitución, de adición o sustracción y de igualación (CCAE5).

Por tanto, en el caso en el que queramos resolver un sistema de ecuaciones de primer grado con igual número de incógnitas, "se elimina una incógnita entre dichas ecuaciones, y resultará una ecuación menos y una incógnita menos. Se vuelve a eliminar una incógnita en estas ecuaciones; y continuando del mismo modo, se llegará a una ecuación con una incógnita" (p. 61). Tras resolver el valor de dicha incógnita, el cálculo de las demás será fácil (CCAE5).

Al igual que en el caso de las ecuaciones de primer grado, recomienda la comprobación de los valores obtenidos y propone varios ejemplos con su solución correspondiente para que sirva de apoyo al alumno (Figura 5-68) (CCAE5).

Ejemplo. 1.° $9x-11y=39$,
$7x+4y=68$.

Eliminando la y, resulta $113\,x=904$, de donde $x=\frac{904}{113}$ $=8$. Para hallar el valor de y, se sustituirá el de x en cualquiera de las ecuaciones que contiene á estas dos incógnitas, y despejando en seguida la y, resulta $y=3$.

NOTA. Si se ha seguido el método 1.° ó el 3.° para eliminar la y; despues que se ha hallado el valor de x, se hallará el valor de y, sustituyendo el valor de x en la ecuacion en que está despejada la y.

Comprobacion de los valores hallados para las incógnitas.

$$9\times8-11\times3=39,$$
$$7\times8+4\times3=68;$$

ó bien

$$39=39,$$
$$68=68.$$

Figura 5-68. Ejemplo de sistema de ecuaciones resuelto en el *Tratado de Álgebra* (Cortázar, 1849, p. 61)

Esto le lleva a la discusión de los tipos de soluciones que pueden tener las ecuaciones según los valores de los coeficientes distinguiendo entre el número de ecuaciones y el número de incógnitas que tenga cada ejercicio a resolver. Define las ecuaciones numéricas con una incógnita como aquellas que, al intentar resolverse, se obtienen soluciones del tipo a=b, siendo a y b distintos o bien 0=0 y, en que la ecuación resulta ser una identidad.

Por último, muestra, mediante ejemplos, la diferencia entre sistema incompatible, que es aquel cuya solución es imposible y sistema indeterminado, que es aquel que tiene infinitas soluciones, por tener ecuaciones en las que una es consecuencia de la otra, es decir, son ecuaciones linealmente dependientes entre sí. Además, analiza las condiciones que deben verificar los coeficientes para que el sistema sea clasificado de una manera u otra (CCAE5).

El libro tercero está dedicado a problemas que pueden resolverse mediante ecuaciones de primer grado. El autor realiza el planteamiento de todos ellos y los resuelve paso a paso siguiendo el siguiente esquema: definición de los datos, planteamiento de las relaciones entre estos, resolución de la ecuación de primer grado y comprobación de la solución hallada. La mayoría de los ejemplos de este capítulo son susceptibles de ser resueltos mediante operaciones aritméticas sin necesidad de usar lenguaje algebraico, sin embargo, Cortázar considera que "por medio del lenguaje simbólico ó razonamiento artificial se simplifica mucho la resolucion de los problemas" (p.5).

No obstante, aclara que la mayoría de los problemas que resuelve a través de ecuaciones de primer grado con una sola incógnita, son también susceptibles de resolverse mediante un planteamiento con varias incógnitas, lo que le lleva a resolver de nuevo los problemas representando cada una de las incógnitas con una letra diferente. También, resuelve de nuevo los ejemplos genéricamente, es decir, usando datos generales en lugar de datos particulares (CCAE5).

El libro cuarto titulado *Potencias y raíces de las cantidades algebraicas* se centra principalmente en las propiedades del producto, cociente y potencia de una potencia y de una raíz de monomios y de polinomios. En primer lugar, apoyándose en la definición de potencia en el *Tratado de Aritmética*, define potencia de un producto, potencia de un quebrado y potencia de una potencia de monomios para después, aportar variados ejemplos (Figura 5-69) (CCAE4).

Ejemplos.

1.° $(2a^3b^5c)^4 = 16a^{12}b^{20}c^4.$

2.° $(-3a^{-4}b^3d^2)^2 = 9a^{-8}b^6d^4.$

3.° $(7a^4b^{-3}d^3f)^{-3} = \frac{1}{343}a^{-12}b^9d^{-9}f^{-3}.$

4.° $\left(\pm\frac{a^3b^2}{5m^2n}\right)^3 = \pm\frac{a^9b^6}{125m^6n^3}.$

Figura 5-69. Ejemplos de ejercicios resueltos sobre potencias en el *Tratado de Álgebra* (Cortázar, 1849, p. 105)

Análogamente define la raíz de un producto y la raíz de un quebrado de monomios, tanto en el caso en el que la raíz sea exacta como en el caso en el que no lo sea (Figura 5-70) (CCAE4).

Ejemplos.

1.° $\sqrt[5]{96a^7b^5c^{11}} = \sqrt[5]{3.2^5a^5a^2b^5c^{10}c} = 2abc^2\sqrt[5]{3a^2c}.$

2.° $\sqrt[3]{\frac{a^7b^4c}{16d^3f^4}} = \sqrt[3]{\frac{a^6ab^3bc}{8.2d^3f^3f}} = \frac{a^2b}{2df}\sqrt[3]{\frac{abc}{2f}}.$

Figura 5-70. Ejemplos de ejercicios resueltos sobre raíces en el *Tratado de Álgebra* (Cortázar, 1849, p. 107)

Para calcular las potencias de los polinomios, define permutaciones y combinaciones de grupos de elementos y deduce la fórmula del binomio de Newton para expresiones del tipo $(a+b)^n$ siendo n entero positivo. Por último, desarrolla el método de extracción de la raíz cuadrada, cúbica y grado m de un polinomio (Figura 5-71) (CCAE4).

$$\begin{array}{r|l}
9x^4 - 12x^3y + 28x^2y^2 - 16xy^3 + 16y^4 & 3x^2 - 2xy + 4y^2 \\ \cline{2-2}
-9x^4 + 12x^3y - \ \ 4x^2y^2 \qquad\qquad\qquad\qquad & 6x^2 \\ \cline{1-1}
24x^2y^2 - 16xy^3 + 16y^4 & \\
-24x^2y^2 + 16xy^4 - 16y^3 & \\ \cline{1-1}
0 \qquad\qquad\qquad &
\end{array}$$

Figura 5-71. Extracción de la raíz cuadrada de un polinomio en el *Tratado de Álgebra* (Cortázar, 1849, p. 121)

El último capítulo del libro cuarto está dedicado al cálculo de las cantidades radicales. Define estas como "la raíz indicada de una cantidad" (p. 127) (CCAE4), y a continuación detalla las operaciones fundamentales con cantidades radicales, para lo que necesita definir cantidades radicales semejantes como “las cantidades radicales del mismo índice, que tienen bajo del signo radical la misma cantidad” (p. 127) (CCAE4).

Define la suma y la resta de cantidades radicales indicando que “si las cantidades radicales son semejantes, se podrán reducir á una sola cantidad radical, en virtud de la igualdad $am + bm - cm = (a + b - c)m$” (p. 127). A continuación, aporta ejemplos de las anteriores operaciones (Figura 5-72) (CCAE4).

Ejemplos.

1.° $3\sqrt[4]{a}+4\sqrt[4]{a}=7\sqrt[4]{a}.$

2.° $5\sqrt[3]{ab}-8\sqrt[3]{ab}=-5\sqrt[3]{ab}.$

Figura 5-72. Suma y resta de cantidades radicales en el *Tratado de Álgebra* (Cortázar, 1849, p. 127)

Tras esto, enuncia y demuestra el resultado que permite reducir a índice común un conjunto de cantidades radicales, para después mostrar cómo se multiplican y se dividen (CCAE4). Así,

> Para multiplicar cantidades radicales de un mismo índice, se multiplican las cantidades que estan debajo de los signos radicales, y el producto se pone bajo el mismo signo radical.
>
> […]
>
> Para multiplicar cantidades radicales de diferente índice, se reducen á un índice comun [152], y quedará este caso reducido al anterior. (p. 129)

Análogamente, se muestra cómo dividir cantidades radicales del mismo y de distinto índice y se aportan ejemplos de ambos casos (Figura 5-73) (CCAE4).

Ejemplos.

1.° $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{b}} = \frac{\sqrt[6]{a^3}}{\sqrt[6]{b^2}} = \sqrt[6]{\frac{a^3}{b^2}}$.

2.° $\frac{a}{b}\sqrt[m]{\frac{c}{d}} : \frac{a'}{b'}\sqrt[m']{\frac{c'}{d'}} = \frac{ab'}{a'b}\sqrt[mm']{\frac{c^{m'}d'^{m}}{d^{m'}c'^{m}}}$.

Figura 5-73. División de cantidades radicales en el *Tratado de Álgebra* (Cortázar, 1849, p. 130)

Con respecto a las cantidades que tienen exponentes fraccionarios, demuestra que $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$ cuando n es divisible por m, pero también especifica que “cuando n no es divisible por m, convenimos en representar el radical $\sqrt[m]{a^n}$ por $a^{\frac{n}{m}}$” (p. 132) (CCAE4).

El último artículo lo dedica al cálculo de las cantidades imaginarias. Tras definirlas como cantidades de la forma $a \pm b\sqrt{-1}$, siendo a su término real y b su parte imaginaria, expone las operaciones de suma, diferencia, producto, cociente, potencias sucesivas y raíces cuadradas (Figura 5-74) (CCAE4).

166. ***La suma, la diferencia, el producto y el cociente de dos cantidades imaginarias*** $a+b\sqrt{-1}$ ***y*** $c+d\sqrt{-1}$ ***es una cantidad imaginaria de la misma forma.***

1.° La suma es $(a+c)+(b+d)\sqrt{-1}$, que tiene dicha forma.

2.° La diferencia es $(a-c)+(b-d)\sqrt{-1}$, que tiene la misma forma.

3.° El producto

$$\left(a+b\sqrt{-1}\right)\left(c+d\sqrt{-1}\right)=(ac-bd)+(bc+ad)\sqrt{-1},$$

que tambien tiene dicha forma.

4.° El cociente

$$\frac{a+b\sqrt{-1}}{c+d\sqrt{-1}}=\frac{\left(a+b\sqrt{-1}\right)\left(c-d\sqrt{-1}\right)}{\left(c+d\sqrt{-1}\right)\left(c-d\sqrt{-1}\right)}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\sqrt{-1},$$

espresion que tiene dicha forma.

Figura 5-74. Operaciones elementales de las cantidades imaginarias en el *Tratado de Álgebra* (Cortázar, 1849, pp. 134-135)

En el libro quinto, desarrolla la resolución de ecuaciones de segundo grado y las clasifica en incompletas, completas, bicuadradas y resolución de dos ecuaciones con dos incógnitas. Para la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ demuestra que son soluciones $x = -\frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{m^2}{4} - n}$ siendo $m = \frac{b}{a}$ y $n = \frac{c}{a}$, las soluciones $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ y $x = r$ y $x = s$, siendo $r + s = -\frac{b}{a}$ y $rs = \frac{c}{a}$ (CCAE6).

Dedica un apartado a la discusión del número y tipo de soluciones en función del discriminante y, por tanto, de los coeficientes de la ecuación. Al igual que el libro tercero, el quinto contiene problemas que pueden resolverse mediante ecuaciones de segundo grado con la solución correspondiente.

Propone y resuelve numerosos problemas cuyo planteamiento le lleva a resolver ecuaciones de segundo grado, como, por ejemplo, “Dividir el número 120 en dos partes cuyo producto sea 999” (p. 159) (CCAE6).

A continuación, aunque el autor especifica que el cálculo de máximos y mínimos es una cuestión del Cálculo Diferencial, lo explica para el caso de funciones de segundo grado. El libro termina con el estudio de las ecuaciones de dos términos de la forma $ax^m = \pm b$.

Los logaritmos y progresiones son estudiados en el libro sexto. Cortázar introduce la teoría sobre logaritmos estudiando las tendencias al infinito y las propiedades de las funciones exponenciales. De ese modo, define “el logaritmo de un número es el esponente a que debe elevarse una cantidad positiva y diferente de 1, llamada base, para que la potencia sea igual al número” (p. 175) (CCAE7). Incluye las propiedades y operaciones de los logaritmos, así como el método de construcción y el uso de la tabla de logaritmos de base 10. Como complemento, incluye la resolución de ecuaciones exponenciales a través de una serie de ejemplos y un problema, en los que estudia la equivalencia entre logaritmos de distinta base.

El último capítulo está dedicado al estudio de las progresiones. Define *progresión por diferencia o aritmética* como “una serie de términos, tales que cada uno excede al inmediato anterior en una misma cantidad” (p. 191) (CCAE7) y *progresión por cociente o progresión geométrica* como “una serie de términos, tales que cada uno es igual al inmediato anterior multiplicado por un mismo número” (p. 200) (CCAE7). Posteriormente estudia los términos generales y la suma de las progresiones aritméticas y geométricas, así como la interpolación de diferentes elementos, entre varios números.

Utiliza la resolución de problemas para dar ejemplos. Éstos versan sobre cálculo de distancias y tiempos, el problema sobre el inventor del ajedrez que podemos encontrar en libros de texto desde el siglo XVI, las aplicaciones para estudiar el número total de balas que pueden colocarse en las pilas de los parques de artillería, los intereses generados por las anualidades o rentas vitalicias y el cálculo de la población de un país (CCAE7).

> Una pila cuadrangular es una pila de balas, que tiene por capas horizontales cuadrados, cuyos lados van disminuyendo sucesivamente en una bala desde la base hasta la capa superior, que consta de una sola bala. Cada bala de esta pila está sostenida por cuatro de la capa inmediata.
>
> […]
>
> Hallar el número de balas de una pila cuadrangular, conociendo el número de balas de la base, ó lo que es igual, conociendo el número de capas. (p. 202)

Una vez analizados los capítulos de los que consta el tratado, se presenta un mapa conceptual (Figura 5-75) del contenido de la edición, en el que se plasma el recorrido seguido en este, pasando por los números negativos y sus operaciones, las expresiones algebraicas y sus operaciones, la resolución de ecuaciones y los problemas asociados a ellas, el cálculo de logaritmos y el cálculo de progresiones y problemas sobre ellas.

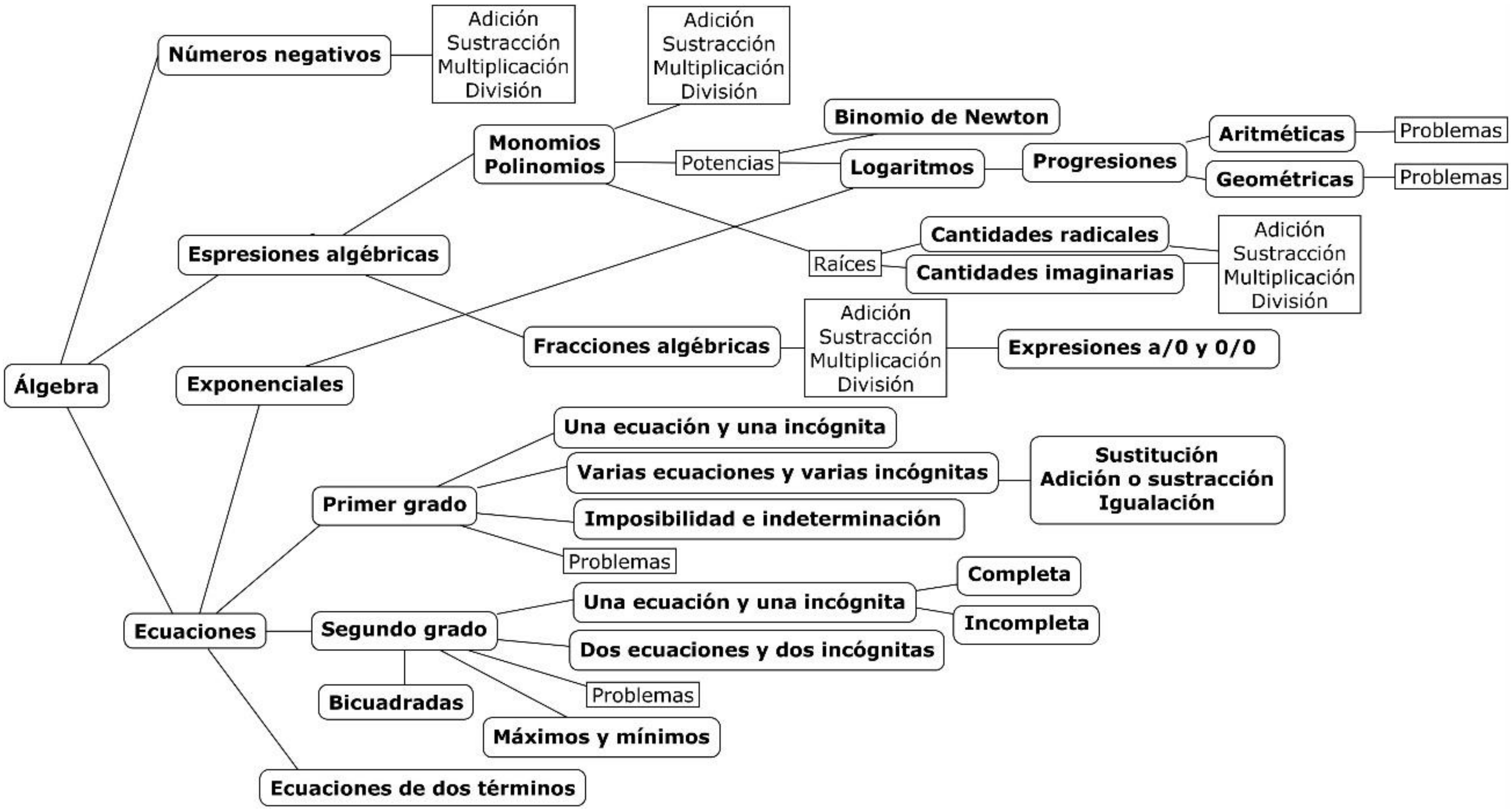


Figura 5-75. Mapa conceptual del *Tratado de Álgebra elemental* (1849)

Sistemas de representación

Se han localizado cinco tipos de representaciones en el texto: el lenguaje verbal, las representaciones algebraicas, numéricas, gráficas y de notaciones algorítmicas.

- El tipo de representación más abundante es el lenguaje verbal. Se usan las palabras para definir conceptos, enunciar propiedades y resultados, realizar demostraciones, proponer ejemplos, ejercicios y problemas. Por ejemplo: “Se llama *cantidad ó expresión algébrica o literal* una reunión cualquiera de letras ligadas por medio de los signos de las operaciones ordinarias” (p. 5).
- Las representaciones algebraicas combinan números con signos y letras. Estas se usan frecuentemente para representar expresiones algebraicas y ecuaciones con el objetivo de clarificar propiedades, realizar demostraciones y dar ejemplos (Figura 5-76).

Ejemplo. $$ab\sqrt[5]{\frac{c^3}{a^2b}}=\sqrt[5]{\frac{a^5b^5c^3}{a^2b}}=\sqrt[5]{a^3b^4c^3}.$$

Figura 5-76. Representación algebraica en el *Tratado de Álgebra* (Cortázar, 1849, p. 107)

- Para dar ejemplos, mediante números y símbolos, de las diferentes propiedades, se usan representaciones numéricas. Aparecen en muy pocas ocasiones debido a que se trata de una obra sobre Álgebra, y para enunciar ejemplos es más frecuente el uso de la representación algebraica (Figura 5-77).

Ejemplos.

1.° $-7-(-4)=-7+4=-3$
2.° $-14-(-6)=-14+6=-8$
3.° $14-(-6)=14+6=20.$

Figura 5-77. Representación numérica sobre números enteros en el *Tratado de Álgebra* (Cortázar, 1849, p. 8)

- Las representaciones de notaciones algorítmicas usan líneas y símbolos para esquematizar los algoritmos de cálculo, como, por ejemplo, la extracción de la raíz cúbica de un polinomio (Figura 5-78).

Ejemplo. **Estraer la raiz cúbica del polinomio.**

$$8x^6-36ax^5+66a^2x^4-63a^3x^3+33a^4x^2-9a^5x+a^6.$$

Operacion.

$$\begin{array}{r|l}
8x^6-36ax^5+66a^2x^4-63a^3x^3+33a^4x^2-9a^5x+a^6 & 2x^2-3ax+a^2 \\
\cline{2-2}
-8x^6+36ax^5-54a^2x^4+27a^3x^3 \qquad\qquad\qquad & 12x^4 \\
\hline
+12a^2x^4-36a^3x^3+33a^4x^2-9a^5x+a^6 & \\
-12a^2x^4+36a^3x^3-33a^4x^2+9a^5x-a^6 & \\
\hline
0 \qquad\qquad &
\end{array}$$

Figura 5-78. Representación de notación algorítmica en el *Tratado de Álgebra* (Cortázar, 1849, p. 126)

- Por último, y aunque en pocas ocasiones, se observan gráficas para ayudar a resolver problemas de móviles en la que las letras indican la posición de cada uno de los móviles (Figura 5-79).

16. Supongamos que sobre una línea indefinida *AB* tenemos dos puntos *A* y *B*, á cuya distancia *AB* llamo *a*, y que un móvil ocupe sucesivamente las tres posiciones *M*, *M'*, *M''*; sea *b* la distancia del móvil al punto *B*, y supongamos que, conocidas *a* y *b*, se quiera hallar la distancia del móvil al punto *A*, á la cual llamo *x*.

Figura 5-79. Representación gráfica en un problema sobre desplazamientos en el *Tratado de Álgebra* (Cortázar, 1849, p. 11)

Fenomenología

Se han encontrado trece tipos de fenómenos o contextos: fenómenos de desplazamientos, de capacidades, cronológicos, de masas, de longitudes, comerciales, laborales, de transmisión, financieros, poblacionales, lúdicos y estrictamente matemáticos, tanto aritméticos como algebraicos.

La obra se desarrolla en un contexto fundamentalmente matemático: se explican las operaciones, se realizan demostraciones, se enuncian ejemplos y proponen ejercicios y problemas. Estos se manifiestan de dos formas distintas:

- Aritméticos: aquellas situaciones en las que hay que resolver ejercicios y problemas de tipo aritmético. Por ejemplo: “Dividir el número 52 en tres partes, tales que la mayor esceda á la mediana en 13, y esta á la menor en 9” (p. 1).
- Algebraicos: aquellas situaciones en las que hay que resolver ejercicios y problemas de tipo algebraico. Por ejemplo: “Hallar dos números cuya suma sea igual á su producto, y tambien á la diferencia de sus cuadrados.” (p. 159).

Como aplicación a los resultados matemáticos, encontramos contextos que se dan en la naturaleza y se rigen mediante leyes físicas. Estos son de cinco tipos:

- Desplazamientos: aquellas situaciones en las que debemos calcular distancias y tiempos de recorrido de uno o varios móviles en ambos sentidos de la recta o la circunferencia, bajo unas condiciones dadas. Por ejemplo: “Siendo en un reloj las 12 en punto, y estando por consiguiente el minutero sobre el horario, ¿qué hora será cuando el minutero vuelva á colocarse sobre el horario?” (p. 83).
- Capacidad: aquellas situaciones en las que debemos calcular los tiempos de llenado o vaciado de productos o sustancias en lugares o recipientes.

> Se ha llenado de agua en 12 minutos una vasija de 39 azumbres de cabida, habiéndola espuesto primeramente á un caño que arrojaba 3 azumbres de agua en cada minuto, y despues a otro que arrojaba 4 azumbres de agua en cada minuto. ¿Cuántos minutos estuvo espuesta á cada uno de los caños? (p. 83)

- Cronológicas: aquellas situaciones en las que debemos calcular la edad o edades de personajes y, para ello se aportan las relaciones entre las edades de varios de ellos o las condiciones entre diferentes periodos de su vida. Por ejemplo: “Preguntándole á uno qué edad tenia un hijo suyo, respondió: si del doble de su edad se resta el triplo de que tenía 6 años há, resultará su edad actual ¿Cuántos años tenia el hijo?” (p. 81).
- Masa: aquellas situaciones en las que hemos de calcular la masa de ciertos productos para que verifiquen ciertas condiciones. Por ejemplo, “Con agua, cuya temperatura es de 32º, se quiere mezclar agua á 0º, ¿cuántas azumbres de las dos se deben tomar, para que resulten 100 azumbres á 19º?” (p. 89).

- Longitud: situaciones en las que se debe calcular una determina longitud (Figura 5-80).

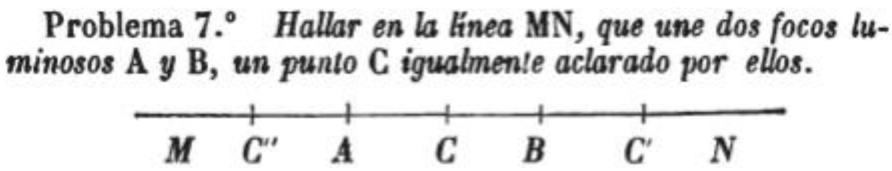

Problema 7.° ***Hallar en la línea MN, que une dos focos luminosos A y B, un punto C igualmente aclarado por ellos.***

Figura 5-80. Fenómeno asociado a la longitud en el *Tratado de Álgebra* (Cortázar, 1849, p. 161)

Los fenómenos sociales son aquellos que estudian el comportamiento de los miembros de una sociedad. Encontramos cinco tipos:

- Fenómenos comerciales: aquellas en las que hay implicadas operaciones de compra-venta. Por ejemplo: "¿Cuántas fanegas de trigo de á 50 reales y de á 40 reales se han de mezclar, para tener trigo de á 47 reales, escediendo el primer número al segundo en 30 fanegas?" (p. 90).
- Fenómenos laborales: aquellas en las que se debe calcular el salario a percibir por una o varias personas.

> Un particular ha pagado 60 reales por 6 dias de trabajo de un obrero y 5 dias de trabajo de otro. En otra ocasion, ganando los obreros el mismo jornal, les ha pagado 184 reales por 17 dias de trabajo del primero trece del segundo. Se pregunta, cuál fue el jornal de estos obreros. (p. 101)

- Fenómenos de transmisión: aquellas en las que debemos averiguar las partes correspondientes al reparto de una herencia.

> Dispuso uno en su testamento que del capital que dejaba, se diesen al mayor de sus hijos 1000 duras y la décima parte del resto; que al hijo segundo se diesen 2000 duros y la décima parte del resto; al tercero 3000 duros y la décima parte del resto, y así sucesivamente. Hecho el reparto, se vió que todas las partes eran iguales. Se pregunta, ¿cuánta era toda la herencia, cuántos eran los hijos y cuánto correspondió a cada uno? (p. 85)

- Fenómenos financieros: aquellas en las que se debe determinar una ganancia o una pérdida económica. Por ejemplo: "Hallar la relacion que liga al capital, al tanto por 1 anual, al tiempo y á la suma del capital é intereses al cabo de este tiempo" (p. 204).

- Fenómenos poblacionales: aquellos en los que se debe calcular los cambios producidos en la población de una comunidad (Figura 5-81).

Sea h el número de habitantes de un país, a su aumento anual por cada habitante (cuyo aumento es fácil calcular, conociendo el aumento anual de 100, 1000 etc. habitantes), t el tiempo espresado en años, y H el número de habitantes del mismo pais al cabo del tiempo t: se demostrará del mismo modo que en la cuestion del interés que, cualquiera que sea el tiempo t, se tiene $H=h(1+a)^t$, ecuacion de la cual se deducirá cualquiera de las cuatro cantidades, dadas las otras tres.

Figura 5-81. Fenómeno asociado al cálculo de poblaciones en el *Tratado de Álgebra* (Cortázar, 1849, p. 206)

- Fenómenos lúdicos: aquellos que implican el cálculo del ganador de un juego o las ganancias obtenidas.

> Se pusieron dos á jugar con otros, y ambos perdieron, el uno 12 rs. Y el otro 57 rs.: el dinero con que este segundo se levantó del juego era la cuarta parte del que al primero le habia quedado; siendo así que los dos se pusieron a jugar con igual cantidad de dinero. Se pregunta ¿cuál era esta cantidad? (p. 81)

Estrategias didácticas

Cortázar es un autor metódico y ordenado y, aunque en general presenta los contenidos con rigor matemático, aportando axiomas y definiciones, y demostrando resultados, teoremas y corolarios, en alguna ocasión, con el propósito de mejorar la enseñanza de algún concepto, recurre al método inductivo y, partiendo de situaciones concretas, deduce resultados generales (RP).

En cada presentación de nuevas definiciones, enfatiza en la importancia de la adquisición de estos conceptos recurriendo a los diversos tipos de ejemplos que puedan presentar dificultades a los alumnos, lo cual requiere un estudio previo de todos los casos que puedan llegar a presentarse en la resolución de un ejercicio o problema (SPM).

En el caso de la resolución de ecuaciones, una vez que se han planteado los métodos de resolución, se presentan diversos tipos de ejemplos particulares, mostrando después la resolución general de dichos problemas. Gracias a ello, puede recomendar a los lectores que intenten resolver los problemas por diferentes métodos usando una incógnita, usando dos o usando datos generales, en lugar de particulares (SPM).

Igualmente, Cortázar conecta nuevos conocimientos con ideas previas o adquiridas para facilitar el proceso de aprendizaje (SPM):

> Ya hemos visto (Aritm. núm. 38) que, para indicar el producto de varias cantidades literales, no hay mas que juntarlas sin interposición de ningun signo. […]
>
> Para indicar el producto de una cantidad literal por una numérica ó literal, se escribe el multiplicador, que en el álgebra se llama coeficiente, y á continuación el multiplicando. (p. 3)

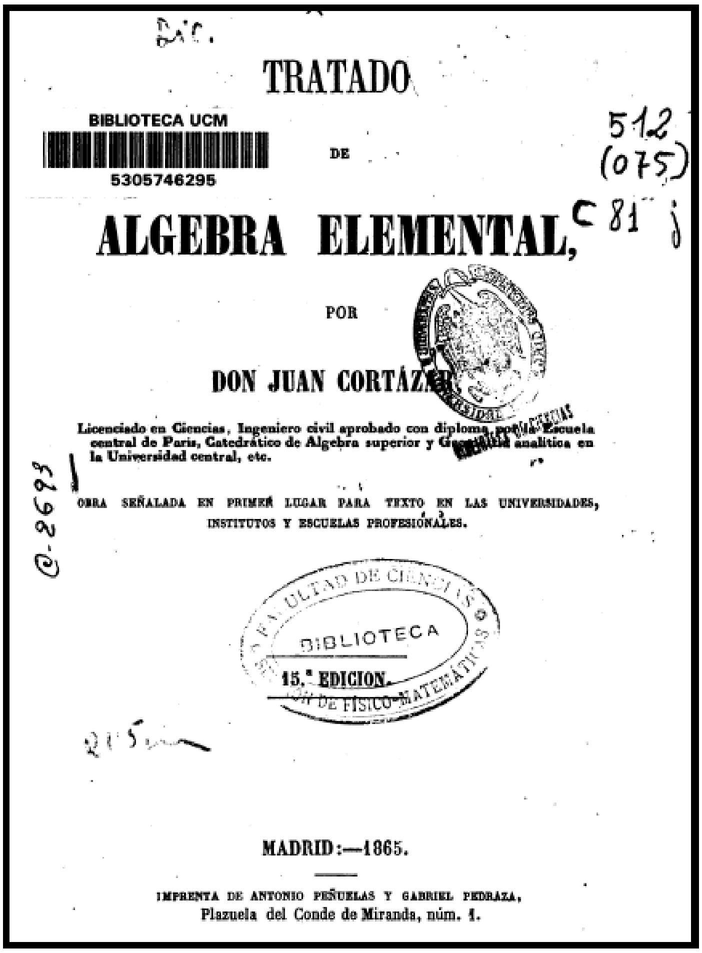
Al tratarse de una obra de Álgebra, se incluyen diversas aplicaciones matemáticas, como la construcción o el uso adecuado de las tablas de logaritmos. No obstante, se han encontrado situaciones planteadas en contextos de la vida cotidiana. Cabe destacar los problemas de interés social en el que se aplican los resultados de la suma de los elementos de una progresión para calcular el número de balas que pueden contener las pilas de balas según la forma de la base o para calcular la población total de un país (APL).

A lo largo de la obra podemos encontrar numerosas notas del autor destinadas a ayudar al estudio del alumno. Por ejemplo, se resalta la conveniencia de considerar la incógnita de una ecuación como representante tanto de un número positivo como uno negativo, para así poder generalizar la misma ecuación para dar soluciones en ambos sentidos. También se vale de los paréntesis y las propiedades asociativa y conmutativa para expresar todos los casos posibles a los que se puede enfrentar el alumno a la hora de calcular y simplificar expresiones algebraicas (SPM).

Anteriormente se ha señalado que autores, como Peset et al. (1978) o Vea (1995) entre otros, coinciden en la originalidad de algunos de los capítulos del tratado con respecto a otros autores contemporáneos (SCO).

5.3.2.2. Periodo 3 (1857-1873): Decimoquinta edición

La decimoquinta edición de la obra fue impresa en Madrid en el año 1865 en la Imprenta de Antonio Peñuelas y Gabriel Pedraza (CE2 y CE3). Este ejemplar está digitalizado y almacenado en el repositorio digital de Google Books y forma parte de la biblioteca de la Universidad Complutense de Madrid (CE4). En su portada se señala que se encontraba señalada en primer lugar como libro de texto oficial para Universidades, Institutos y Escuelas profesionales (CE 6).



TRATADO

DE

ALGEBRA ELEMENTAL,

POR

DON JUAN CORTÁZAR,

Licenciado en Ciencias, Ingeniero civil aprobado con diploma por la Escuela central de Paris, Catedrático de Algebra superior y Geometría analítica en la Universidad central, etc.

OBRA SEÑALADA EN PRIMER LUGAR PARA TEXTO EN LAS UNIVERSIDADES, INSTITUTOS Y ESCUELAS PROFESIONALES.

15.ª EDICION.

MADRID:—1865.

IMPRENTA DE ANTONIO PEÑUELAS Y GABRIEL PEDRAZA,
Plazuela del Conde de Miranda, núm. 1.

Figura 5-82. Portada del *Tratado de Álgebra elemental* (Cortázar, 1865)

Está formado por un solo tomo de 216 páginas, organizado en 6 libros, éstos a su vez divididos en 33 capítulos, con contenidos y títulos similares a los de la segunda edición, analizados anteriormente, a excepción de la inclusión de la nota situada al final de la decimoquinta edición, titulada *Sobre las ecuaciones de segundo grado* (CE5 y CE7).

Se puede observar un cambio significativo en el lenguaje al cambiar las palabras *comensurable* e *incomensurable* por las actuales, *conmensurable* e *inconmensurable* (CE8).

Estructura conceptual

A rasgos generales, la decimoquinta edición incluye un mayor número de ejemplos, ejercicios y problemas, que ayuda al lector a aclarar nuevos conceptos y propiedades.

Asimismo, las demostraciones de propiedades y teoremas se presentan de un modo más asequible a las de la segunda edición, haciendo uso de razonamientos más generales y, en la medida de lo posible, evitando estudiar cada uno de los casos que se incluyen.

Merece la pena destacar la adición de una nota tras la interpretación de las expresiones $\frac{a}{0}$ y $\frac{0}{0}$, que muestra cómo reducir las expresiones de tipo $0 \cdot \infty$ o $\frac{\infty}{\infty}$ a expresiones de tipo $\frac{0}{0}$, que han sido presentadas anteriormente.

Por otro lado, dedica un pequeño apartado a resolver ecuaciones con una incógnita en los casos en los que la incógnita aparece en el denominador o en forma de radical. La obra recuerda que en los casos en los que se multipliquen o dividan ambos miembros de la ecuación por cantidades desconocidas, así como elevando a una potencia o extrayendo raíces, se debe comprobar que las soluciones dadas son realmente soluciones de la ecuación ya que el número de soluciones puede variar.

Como ya se ha señalado, al final del tratado añade una nota titulada *Sobre las ecuaciones de segundo grado*, en la cual deduce la fórmula de la ecuación de segundo grado, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ mediante tres métodos diferentes y, además, la resolución de la ecuación $x^2 + mx + n = 0$ por el método de Diofanto, que usa las propiedades de las raíces de la ecuación de segundo grado para resolverla.

Sistemas de representación

La edición no presenta cambios con respecto a los sistemas de representación.

Fenomenología

Aunque la decimoquinta edición incluye un mayor número de ejemplos, ejercicios y problemas, no presenta cambios con respecto a la fenomenología usada.

Estrategias didácticas

Además de las estrategias señaladas en la segunda edición, cabe destacar la importancia que se le da a que los alumnos sepan distinguir entre identidad y ecuación dedicándole incluso, una nota especial para ello (SPM). Ésta dice,

> Obsérvese con cuidado, pues es de gran importancia, la diferencia que hay entre identidad y ecuación: la primera se verifica por cualesquiera valores de sus letras, mientras que la segunda solo se verifica por ciertos valores de la incógnita o incógnitas que contenga. (p. 4)

Previo al estudio de las raíces de monomios y polinomios, en esta edición la obra dedica un apartado a recordar la definición de raíz de un número positivo o negativo, así como la definición de raíz aritmética de un número presentada también en el *Tratado de Aritmética*. Además, señala que "para evitar confusión, indicaremos en adelante la raiz aritmética de un número positivo, ó la raiz real negativa de grado impar de un número negativo" (p. 98) (SPM).

Conclusiones

Aunque la obra tiene evidentes influencias francesas y sigue los planes de estudio del país vecino (Vea, 1995), Cortázar introduce diferencias significativas con respecto a obras contemporáneas. Una de estas consiste en la segregación del Álgebra y la Aritmética, su coherencia al ordenar los contenidos y al señalar con asteriscos los enunciados que los profesores de secundaria debían omitir en sus clases. Esto hace del *Tratado de Álgebra elemental* una obra útil y versátil en la mayoría de los ámbitos, ya sea en enseñanza secundaria, en escuelas profesionales, en escuelas normales o en la Universidad.

Los contenidos destacan por su carácter y estructura formal. Todos los resultados vienen acompañados de su rigurosa demostración o de la referencia en la que se encuentran ubicados, en alguna otra de sus obras. También por la gran variedad de ejemplos y situaciones que se encuentran; desde el estudio de los números negativos, hasta la resolución de ecuaciones, pasando por el cálculo de expresiones algebraicas.

Al tratarse de una obra sobre Álgebra, el contexto al que más se recurre a la hora de proponer ejemplos y problemas, es el estrictamente matemático. Sin embargo, también podemos encontrar diversas situaciones de tipo social, físico o natural y lúdico. Desde el punto de vista fenomenológico, presenta una gran variedad de contextos en los que pueden ser aplicados el cálculo de expresiones algebraicas y la resolución de ecuaciones pueden ser aplicadas.

El análisis de contenido, centrado en los sistemas de representación de la obra, nos muestra que predomina el lenguaje verbal elegido meticulosamente para exponer definiciones, resultados, propiedades, ejemplos, ejercicios y problemas y el lenguaje simbólico para ejemplificar dichos resultados y ejemplos. En menor medida se hallan representaciones numéricas y gráficas, y es nulo, el uso de tablas.

5.4. Obra: *Tratado de Álgebra superior*

5.4.1. Caracterización de la obra

El *Tratado de Álgebra superior* (CO1) se editó por primera vez en 1849 en una edición que incluía también el *Tratado de Álgebra elemental* titulada simplemente *Tratado de Álgebra* (CE1). Cortázar decidió publicar la segunda edición de forma independiente al Álgebra Elemental en 1858, pero a partir de la tercera edición en 1864, decidió titularla *Complemento del Álgebra*. Solo conocemos la existencia de tres ediciones más, las de los años 1869, 1871 y 1885, la última, corregida y arreglada tras su muerte por su hijo Daniel Cortázar y Larrubia (CO2, CO3 y CO4).

A partir de la tercera edición de 1864, se anuncia en la portada que la obra estaba señalada como libro de texto en las Universidades y Escuelas Superiores. En particular, estaba destinada a los alumnos que cursaban la asignatura Álgebra Superior y Geometría Analítica de la cátedra de Cortázar en la Universidad Central. Apareció periódicamente en las listas oficiales de libros desde 1858 hasta 1868 (CO5) (Vea y Velamazán, 2011).

Irueste (1912) realiza un análisis de las últimas ediciones y destaca el desarrollo del teorema de Rolle, las modificaciones y ampliaciones del teorema y funciones de Sturm, la demostración del teorema de Taylor para las funciones trascedentes y la exposición de la teoría de los máximos y mínimos de las funciones de una variable (CO6).

5.4.2. Caracterización de las ediciones

5.4.2.1. Periodo 2 (1845-1857): Primera edición

Analizaremos la primera edición, impresa en Madrid en 1849 en la Imprenta de Don A. Espinosa y Cía. Este ejemplar está digitalizado por el repositorio Google Books y puede encontrarse en la Biblioteca de la Universidad Complutense de Madrid (CE2, CE3 y CE4).

Está formado por un solo tomo de 210 páginas, dividido en seis libros. Éstos, a su vez, están divididos en un total de 22 capítulos. Los 6 libros están dedicados a la resolución de ecuaciones polinómicas de grado igual o mayor a tres, tanto por el método general, como para los casos particulares de las ecuaciones recíprocas o las ecuaciones binomias o trinomias, así como el desarrollo en series de las funciones racionales, exponenciales y logarítmicas (CE5).

Es una obra que usa un lenguaje formal, que está constituida por definiciones, proposiciones y teoremas con su respectiva demostración, corolarios y notas. Con respecto a los ejemplos, se incluyen uno y, en algunos casos dos, por cada uno de los conceptos y métodos de resolución (CE5).

Tabla 5-4. *Índice del Tratado de Álgebra superior de Juan Cortázar, 1849*

LIBRO 5º - Eliminación de una incógnita entre dos ecuaciones con dos incógnitas, y resolución de estas ecuaciones; ecuación de las diferencias; separación de las raíces inconmensurables por el método de Lagrange; investigación de las raíces imaginarias.	Págs. 376-402
Eliminación de una incógnita entre dos ecuaciones con dos incógnitas, y resolución de estas ecuaciones: Método de eliminación por sustitución, Método de eliminación por el máximo común divisor-Ecuación de las diferencias-Método de Lagrange para la separación de las raíces inconmensurables-Investigación de las raíces imaginarias.	
LIBRO 6º - Series	Págs. 403-418
Convergencia y divergencia de las series-Método de los coeficientes indeterminados-Series exponenciales y logarítmicas	

Entre las referencias a otros autores en el texto, cita a Taylor y su Teorema de para calcular el desarrollo de f(x+h) en funciones enteras y racionales, a Newton y el el método para calcular el límite superior de las raíces de una ecuación, a Descartes y su Regla de los signos para conocer el número de raíces positivas de una ecuación conociendo el número de variaciones y el número de permanencias, a Sturm y su teorema para separar las raíces de una ecuación, los métodos de Lagrange o de aproximación de Newton para aproximar tanto como queramos las soluciones inconmensurables de una ecuación y a Moivre y su fórmula para el cálculo de cantidades imaginarias. No encontramos referencias a libros de texto en los que el tratado pueda estar basado. Sin embargo, hallamos referencias continuas a sus tratados de *Aritmética*, *Álgebra elemental*, *Geometría elemental* y *Trigonometría y Topografía* (CE7).

Hace uso del símbolo asterisco que, en otros de sus tratados, distinguen los apartados que los profesores de filosofía o escuelas técnicas deben omitir. Sin embargo, en esta ocasión, no aparece nota aclaratoria de su significado (CE8).

Estructura conceptual

El tratado recopila en su libro primero las nociones previas que el lector necesita para poder afrontar la teoría completa sobre resolución de ecuaciones. En primer lugar, define fracción continua (Figura 5-83).

247. **Se** llama *fraccion contínua* una espresion de la forma

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\text{etc.},}}}$$

en la que las cantidades a, b, c, etc. son números enteros y positivos. Estos números enteros y positivos se llaman *cocientes incompletos*.

Figura 5-83. Definición fracción continua en el *Tratado de Álgebra* (Cortázar, 1849, p. 209)

A continuación, se detalla el método general para hallar en fracción continua una cantidad conmensurable (entero o fraccionario) (Figura 5-84) o inconmensurable (raíz de entero o fraccionario no exacta) y su aplicación a la construcción de unas tablas de logaritmos. Tras enunciar y demostrar las aplicaciones que poseen las fracciones continuas, define el concepto de fracción continua periódica pura y mixta.

Segun la regla que acabamos de hallar, si queremos reducir á fraccion contínua la fraccion $\frac{715}{228}$, ejecutaremos el cálculo siguiente:

715	228	31	11	9	2	1
	3	7	2	1	4	2
31	11	9	2	1	0	

Luego $$\frac{715}{228}=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2}}}}}.$$

Figura 5-84. Ejemplo de reducción de una fracción ordinaria a una continua en el *Tratado de Álgebra* (Cortázar, 1849, p. 209)

Los capítulos II, III y IV estudian la divisibilidad de las cantidades algebraicas. Para ello recuerda las definiciones dadas en el *Tratado de Álgebra elemental* de cantidad o expresión racional y cantidad entera. Así, se definen los conceptos de cantidad algebraica entera divisible por otra o múltiplo de otra, cantidad prima o simple, cantidades primas entre sí, máximo común divisor, múltiplos y múltiplo más simple de cantidades algebraicas enteras.

Además de enunciar y demostrar sus respectivas propiedades, se explica detalladamente y se refuerza con ejemplos, el método para hallar el máximo común divisor de dos polinomios con una y con dos letras en su parte literal (Figura 5-85) y a aplicarlo para poder simplificar fracciones algebraicas.

Ejemplo. Hallar el *m. c. d.* de los polinomios

$$A=2(y^3-2y^2-y+2)x^3+3x^2(y^2-1)-(2y^3-y^2-2y+1),$$
$$B=6a\,(y^3-4y^2+5y-2)x^2+14a(y^2-2y+1)x-2a(5y^3-5y^2+y+1).$$

Como el polinomio A es de mayor grado en x que el polinomio B, tomaré por dividendo el A y por divisor el B: pero en primer lugar hallaré el *m. c. d.* de los coeficientes de x en el polinomio A, que ya sabemos hallar, puesto que dichos coeficientes son polinomios de una letra. El *m. c. d.* de dichos coeficientes es y^2-1.

Hallo ahora el *m. c. d.* de los coeficientes de x en B, que es $2a(y^2-2y+1)$.

El *m. c. d.* de $2a(y^2-2y+1)$ y de y^2-1 es $y-1$. Divido ahora el polinomio A por y^2-1, y el polinomio B por $2a(y^2-y^2+1)$, y tendré

$$A'=2(y-2)x^3+3x^2-(2y-1),$$
$$B=3(y-2)x^2+7x-(3y+1).$$

Para hallar el *m. c. d.* de estos dos polinomios, ejecutaré las operaciones siguientes.

Figura 5-85. Cálculo del máximo común divisor de dos en el *Tratado de Álgebra* (Cortázar, 1849, p. 244)

Si bien, en el capítulo IV define función racional y entera como “toda espresion que contiene á x con esponentes enteros y positivos, aun cuando los esponentes de las otras letras que puede contener la funcion, y los esponentes de los coeficientes numéricos sean fraccionarios ó negativos” (p. 247), es en el capítulo V cuando retoma el concepto de función dada en el *Tratado de Álgebra elemental* para trabajar la función derivada. Define función derivada de una función como “el coeficiente de la primera potencia de h en el desenvolvimiento de f (x+h)” (p. 250) (Figura 5-86). La denota por f ´(x) y enuncia el método para el cálculo de la derivada de funciones racionales y enteras y de producto de factores binomios de primer grado.

Asi, siendo $f(x)=x^2-3x+1$,
se tendrá
$$f(x+h)=(x+h)^2-3(x+h)+1=x^2-3x+1+(2x-3)h+h^2;$$
luego $f'(x)=2x-3$.

Figura 5-86. Ejemplo de cálculo de función derivada en el *Tratado de Álgebra* (Cortázar, 1849, p. 250)

Antes de finalizar el capítulo, enuncia el teorema de Taylor como una igualdad para el caso particular de las funciones raciones y enteras, es decir, "Siendo f(x) una funcion entera y racional, será $f(x+h)=f(x)+f'(x)\cdot h+\frac{f''(x)}{1\cdot 2}h^2+\frac{f'''(x)}{1\cdot 2\cdot 3}h^3+\cdots$" (pp. 251), que para $f(x)=M\cdot x^n+N\cdot x^n+P\cdot x^p+\cdots$ con m>n>p, tendrá un segundo miembro de m+1 términos (Figura 5-87).

Ejemplo. **Hallar por medio de la fórmula de Taylor el desenvolvimiento de la funcion $4x^3-24x^2+3x+1$, cuando x vale $2+h$.**

Tenemos
$$f(h+2)=f(h)+2f'(h)+2^2\frac{f''(h)}{2}+2^3\frac{f'''(h)}{2.3}.$$
Como la funcion es de tercer grado, no tiene mas que tres derivadas. Poniendo ahora en vez de $f(h)$, $f'(h)$,... sus valores, que son
$$\begin{aligned} f(h)&=4h^3-24h^2+3h+1,\\ f'(h)&=12h^2-48h+3,\\ f''(h)&=24h-48 = 2(12h-24),\\ f'''(h)&=24,\end{aligned}$$
tendremos
$$\begin{array}{rrrrr} f(h+2)= & 4h^3 & -24h^2 & +3h & +1\\ & & +24h^2 & -96h & +6\\ & & & +48h & -96\\ & & & & +32\\ \hline & 4h^3 & & -45h & -57\end{array}$$

Figura 5-87. Ejemplo de aplicación del Teorema de Taylor en el *Tratado de Álgebra* (Cortázar, 1849, pp. 252-253)

Es en el libro segundo donde se fija el objetivo específico de este tratado, la resolución de las ecuaciones algebraicas, que son aquellas en las que ambos miembros están formados por funciones algebraicas, es decir, funciones "en que las variables están sumadas, restadas, multiplicadas, partidas, tienen esponentes conocidos, ó están debajo de radicales de índice conocido” (p. 249) (CCAS1). Las notaciones (CCAS1) con las que se trabaja son:

- la fórmula general de la ecuación de grado m,

$$A \cdot x^m + B \cdot x^{m-1} + \ C \cdot x^{m-2} + \cdots + Kx + L = 0$$

- la forma ordinaria en la que se supone que el coeficiente del primer término es 1,

$$x^m + P \cdot x^{m-1} + \ Q \cdot x^{m-2} + \cdots + Tx + U = 0$$

- y abreviadamente, la ecuación f (x)=0.

Antes de comenzar a describir los métodos de resolución de ecuaciones, se detallan ciertas nociones preliminares como la descripción de un método breve para calcular el valor numérico del primer miembro de una ecuación (Figura 5-88).

Ejemplos. **1.° Hallar el valor del primer miembro de la ecuacion $x^5-3x^4-4x^3+4x^2+2x-8=0$, poniendo en vez de x el número 2.**

Diré: $1\times2-3=-1$, $-1\times2-5=-7$, $-7\times2+4=-10$, $-10\times2+2=-18$, $-18\times2-8=-44$.

2.° Hallar el valor del primer miembro de la ecuacion $4x^4-6x^3-18x+9=0$, cuando x vale 4.

Diré: 4 por 4 son 16, menos 6 son 10; 10 por 4 son 40; 40 por 4 son 160, menos 18 son 142, 142 por 4 son 568, mas 9 son 577.

Figura 5-88. Valor numérico del primer miembro de una ecuación en el *Tratado de Álgebra* (Cortázar, 1849, p. 255)

Define raíz de una ecuación como “toda cantidad real ó imaginaria, que sustituida en vez de la incógnita en dicha ecuación la satisface, es decir, reduce á cero su primer miembro” (pp. 255-256) y enuncia sin demostrar el teorema que establece que “toda ecuación f (x)=0 tiene una raiz” (p. 256). Aunque no demuestra el teorema anterior, lo admite porque en el siguiente capítulo es demostrado para toda ecuación de grado impar y para toda ecuación de grado par, cuyo término independiente sea negativo.

Además, se enuncia y demuestran los teoremas necesarios para componer las ecuaciones, es decir, “toda ecuación tiene tantas raíces como tiene su grado” (p. 257), que toda ecuación reducida a su forma ordinaria cuyas raíces son a, b, c,…, l, puede escribirse como el producto de binomios $f(x) = (x - a)(x - b)(x - c) \dots (x - l)$ y que pueden calcularse todos los coeficientes de la ecuación reducida conociendo el valor de las raíces. Esto le lleva a plantearse el problema, “Dadas las raíces a, b, c,… de una ecuación, componer esta ecuación” (pp. 258) (Figura 5-89) (CCAS1).

***Ejemplo.* Componer la ecuacion cuyas raices son 1, 3 y —2. Dicha ecuacion será**

$$(x-1)\ (x-3)\ (x+2)=0,$$

ó

$$x^3-2x^2-5x+6=0.$$

Figura 5-89. Ejemplo de composición de una ecuación en el *Tratado de Álgebra* (Cortázar, 1849, p. 258)

El segundo capítulo del libro está destinado a transformar una ecuación en otra que tenga raíces con alguna relación determinada a las raíces de la primera. Por ejemplo, “Dada una ecuación, hallar otra cuyas raíces sean iguales á las de la propuesta con los signos mudados” (p. 259).

En el libro tercero se introducen las técnicas para encontrar las soluciones a las ecuaciones. Un paso previo consiste en encontrar los límites superiores e inferiores de las raíces positivas y negativas de la ecuación para acotarlas y tener un dominio más pequeño en el que buscar. Se detallan cuatro métodos en el que destaca el método de Newton, que a pesar de ser el más laborioso, es el que consigue menores límites superiores y mayores límites inferiores (Figura 5-90).

Ejemplo. **Hallar el límite superior de las raices positivas de la ecuacion**

$$f(x)=x^5-x^4+7x^3-6x^2-14x-8=0.$$

Tendremos

$$f'(x)=\ 5x^4-\ 4x^3+21x^2-12x-14,$$
$$f''(x)=\ 20x^3-12x^2+42x-12=2(10x^3-6x^2+21x-6),$$
$$f'''(x)=\ 60x^2-24x+42\ =6(10x^2-4x+7),$$
$$f^{\text{IV}}(x)=120x-24\ =24(5x-1).$$

Esta última derivada es positiva, haciendo $x=1$. La derivada anterior $f'''(x)$ es tambien positiva por el mismo valor 1 de *x;* la anterior $f''(x)$ es tambien positiva, siendo $x=1$; la anterior $f'(x)$ no es positiva, siendo $x=1$. Haremos pues $x=2$, y resulta valor positivo para $f'(x)$; y por consiguiente 2 hará positivas á las derivadas $f''(x)$, $f'''(x)$, $f^{\text{IV}}(x)$, segun se ha demostrado en el teorema [300].

Haciendo ahora $x=2$ en $f(x)$, el resultado es positivo: luego 2 hace positivas á $f(x)$ y á todas sus derivadas, y por tanto [300, *Corol.*] 2 es el límite superior de las raices positivas de la ecuacion propuesta.

Figura 5-90. Ejemplo del método de Newton para calcular los límites superiores de las raíces de una ecuación en el *Tratado de Álgebra* (Cortázar, 1849, p. 258)

El capítulo segundo del este libro enuncia y demuestra los teoremas de existencia de solución de las ecuaciones, así “toda ecuacion de grado impar tiene por lo menos una raiz real de signo contrario al de su último término” (p. 279) y “toda ecuacion de grado par, cuyo último término sea negativo, tiene por lo menos una raiz real positiva y una raiz real negativa” (p.279). Aunque no demuestra la existencia de solución en las ecuaciones de grado par con último término positivo, puede concluir mediante reducción al absurdo que, si una ecuación solo tuviera raíces imaginarias, sería de grado par, con el último término positivo y sus valores siempre positivos para todo valor de x.

Detalla paso a paso el método general para hallar las raíces conmensurables e inconmensurables de toda ecuación, y asimismo se incluyen numerosos ejercicios resueltos (CCAS1) después de la explicación de cada uno de los pasos del método y de su completa aplicación (Figura 5-91).

Ejemplo. $x^6+3x^5-15x^4-35x^3+90x^2+108x-216=0.$

El límite superior es 4: 1 no es raiz; luego no hay que comprobar mas que 2 y 3. Efectuando el cálculo, se halla que 2 es raiz.

Para hallar las raices enteras negativas, mudo x en $-x$, y tengo [293]

$$x^6-3x^5-15x^4+35x^3+90x^2-108x-216=0.$$

El límite superior es 7; luego, como 1 no es raiz de esta ecuacion, no hay que comprobar mas que 2, 3, 4 y 6.

Hecha la comprobacion, se halla que 3 es raiz, y por consiguiente -3 es raiz de la propuesta.

Dividiendo el primer miembro de esta por $(x-2)(x+3)$, el cociente es $x^4+2x^3-11x^2-12x+36=0$.

Esta ecuacion no puede tener mas raices enteras que 2 y -3: sometiendo estas á prueba, se halla que en efecto son raices. Dividiendo el primer miembro de la última ecuacion por $(x-2)(x+3)=x^2+x-6$, se halla x^2+x-6, que igualado á 0, nos da $x=2, x=-3$.

Luego cada una de las raices 2 y -3 está repetidas tres veces.

Figura 5-91. Ejemplo de extracción de las raíces conmensurables enteras de una ecuación en el *Tratado de Álgebra* (Cortázar, 1849, p. 287)

El tratado dedica su libro cuarto a dar resultados sobre la ecuación recíproca, es decir, aquella "que no se altera mudando en ella x por $\frac{1}{x}$" (p. 332) que ayudarán a la resolución mediante métodos algébricos y trigonométricos de las ecuaciones binomias y trinomias, que son aquellas que tienen dos o tres términos respectivamente (Figura 5-92) (CCAS1).

Ejemplo. **Sea la ecuacion $y^6+1=0$.**
Partiendo esta ecuacion recíproca por y^3, tendré

$$y^3+\frac{1}{y^3}=0.$$

Haciendo

$$y+\frac{1}{y}=z \qquad [A],$$

y sustituyendo en la ecuacion anterior el valor de $y^3+\frac{1}{y^3}$, que es z^3-3z, tendremos

$$z^3-3z=0,$$

Figura 5-92. Ejemplo de resolución de una ecuación binomia en el *Tratado de Álgebra* (Cortázar, 1849, p. 342)

Se demuestran sin aportar ejemplos, las fórmulas para resolver las ecuaciones de tercer y cuarto grado algebraicamente. Partiendo de la forma reducida de la ecuación de tercer grado $x^3+3px+2q=0$, se deduce siendo $\alpha=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ y $\alpha^2=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$,

$$x=\sqrt[3]{-q+\sqrt{q^2+p^3}}+\sqrt[3]{-q-\sqrt{q^2+p^3}}$$

$$x=\alpha\sqrt[3]{-q+\sqrt{q^2+p^3}}+\alpha^2\sqrt[3]{-q-\sqrt{q^2+p^3}}$$

$$x=\alpha^2\sqrt[3]{-q+\sqrt{q^2+p^3}}+\alpha\sqrt[3]{-q-\sqrt{q^2+p^3}}$$

Análogamente se deducen las de cuarto grado. También dedica un apartado al caso *irreducible*, es decir, el que verifica que $q^2+p^3<0$, en el que señala que, en este caso, las fórmulas anteriores no son tan útiles como el método general para calcular los valores de la incógnita, pero que, haciendo uso de la fórmula de Moivre, se pueden transformar en otras trigonométricas equivalentes.

En el primer capítulo del libro quinto, se usan los métodos de eliminación por sustitución y eliminación por el máximo común divisor para resolver dos ecuaciones de grado m con dos incógnitas. Se destaca que el primer método puede darnos valores que no sean soluciones de las ecuaciones (Figura 5-93), sin embargo, el segundo método, aunque algo más extenso, solo devuelve las raíces de las ecuaciones.

2.° Resolver las dos ecuaciones

$$y^2 - x^2 + 1 = 0,$$
$$y^3 - 2x^3 + x^2 + x + 1 = 0.$$

Eliminemos la y: despejándola en la 1.ª, resulta

$$y = \pm\sqrt{x^2 - 1} \qquad [A],$$

y sustituyendo este valor en la 2.ª ecuacion, tendremos

$$(x^2 - 1) \times \pm\sqrt{x^2 - 1} - 2x^3 + x^2 + x + 1 = 0 \quad [B].$$

Ahora, para poder resolver estas dos ecuaciones, es menester darlas la forma ordinaria; y para esto, dejo la cantidad radical en el primer miembro, paso la parte racional al segundo, y elevo al cuadrado, y resultará la ecuacion, hechas todas las reducciones,

$$3x^6 - 4x^5 - 2x^3 + 8x^2 + 2x + 1 = 0.$$

Halladas las seis raices de esta ecuacion, se veria cuáles satisfarian á la primera de las ecuaciones [B], y cuáles á la segunda; y los valores de y correspondientes á las primeras se hallarian por la primera de las ecuaciones [A], y los correspondientes á las segundas por la segunda ecuacion [A].

Figura 5-93. Eliminación por sustitución de dos ecuaciones con dos en el *Tratado de Álgebra* (Cortázar, 1849, p. 380)

Además del método de separación de las raíces inconmensurables mediante las funciones de Sturm, se enuncia, sin realizar ejemplos, el método de Lagrange, para el cual es necesario hallar la ecuación de los cuadrados de las diferencias de las raíces de f(x)=0.

El libro quinto termina con un capítulo dedicado a hallar las raíces imaginarias de una ecuación bajo un sencillo supuesto, hallar "todos los valores reales de y y de z que hagan que $y + z\sqrt{-1}$ sea una raíz de la ecuacion" (p. 401).

El libro sexto titulado *Series* define serie como "un polinomio de infinitos términos los cuales siguen una ley constante en su formación" (p. 403). Se enuncian y demuestran las propiedades de las series convergentes y divergentes, entendiendo por serie convergente a aquella que verifique que "la suma de todos los términos que siguen a los n primeros tiene por límite cero" (p. 403) (CCAS2).

A través del método de coeficientes indeterminados, se realiza el desarrollo en series de funciones racionales, exponenciales y logarítmicas, apoyado por la generalización del binomio de Newton para exponentes fraccionarios. Como aplicación, se realizan aproximaciones a raíces n-ésimas de cantidades enteras (Figura 5-94) (CCAS2) y se explica el método de construcción de tablas de logaritmos.

Supongamos, por ejemplo, que queremos estraer la raiz cuarta de 17.

Para que la serie sea lo mas convergente posible, descompondremos 17 en las dos partes 16 y 1, y escribiremos

$$17=16\left(1+\frac{1}{16}\right);$$

y por consiguiente

$$\sqrt[4]{17}=16^{\frac{1}{4}}\left(1+\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Ahora,

$$\left(1+\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}}=1+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{16}+\frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)}{2}\cdot\frac{1}{16^2}+\frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)\left(\frac{1}{4}-2\right)}{2.3}\cdot\frac{1}{16^3}+\text{etc.}=$$

$$1+\frac{1}{64}+\frac{1-4}{2}\cdot\frac{1}{(64)^2}+\frac{(1-4)(1-8)}{2.3}\cdot\frac{1}{(64)^3}+\frac{(1-4)(1-8)(1-12)}{2.3.4}\cdot\frac{1}{(64)^4}+\text{etc.};$$

por consiguiente

$$\sqrt[4]{17}=2+\frac{1}{32}-\frac{5}{64^2}+\frac{7}{(64)^3}-\ldots$$

serie muy convergente, y por medio de la cual es fácil calcular la raiz cuarta de 17 con cuanta aproximacion se quiera [385, *Nota*].

Figura 5-94. Convergencia de la raíz cuarta de en el *Tratado de Álgebra* (Cortázar, 1849, p. 414)

Presentamos un mapa conceptual (Figura 5-95) del contenido de la edición en el que se ilustra el recorrido seguido, comenzando con nociones previas a la resolución como fracciones continuas, máximo común divisor de varias cantidades algebraicas o límites de raíces, hasta ver el método general de resolución de las ecuaciones a través del cálculo de todas sus raíces enteras, fraccionarias, inconmensurables e imaginarias.

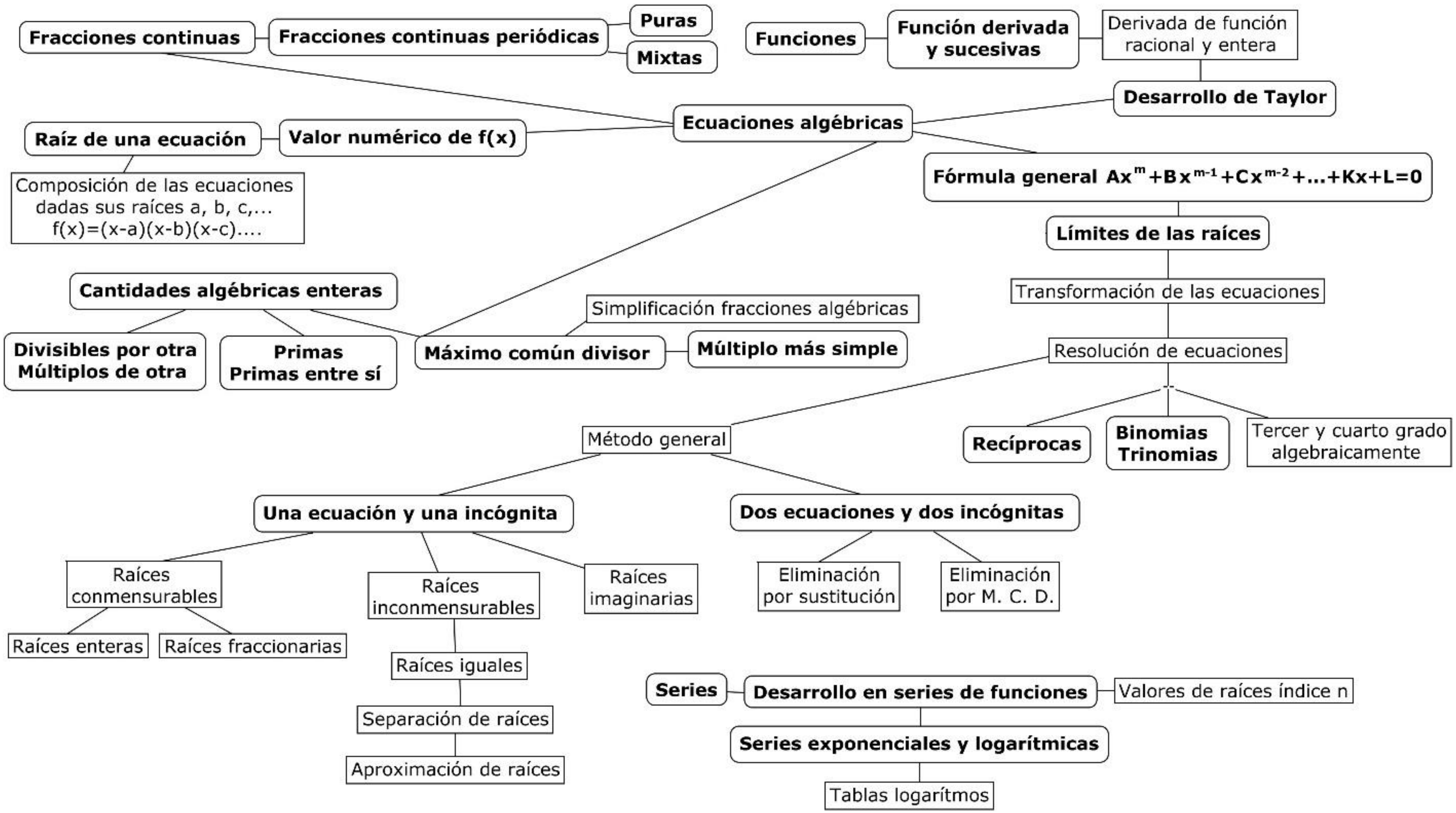


Figura 5-95. Mapa conceptual del *Tratado de Álgebra superior* (1849)

Sistemas de representación

Se han localizado cuatro tipos de representaciones en el texto: el lenguaje verbal, las representaciones algebraicas, las representaciones numéricas y las representaciones de notaciones algorítmicas.

- Análogamente al resto de tratados, el tipo de representación más abundante es el lenguaje verbal. Con él se exponen definiciones, propiedades, resultados, ejemplo y problemas. Por ejemplo, “Se llama ecuacion algébrica la ecuacion cuyos dos miembros son funciones algébricas, y ecuacion trascendente la ecuacion que tiene uno ó mas términos que son funciones trascendentes.” (p. 254).
- Las representaciones algebraicas se usan frecuentemente para en las expresiones algebraicas y ecuaciones con el objetivo de ejemplificar propiedades y realizar demostraciones.

> En efecto, acabamos de demostrar que, reducida una ecuacion á la forma ordinaria, su primer miembro f(x) es el producto de tantos factores binomios de primer grado en x como unidades tiene el grado de la ecuacion; esto es, que
>
> $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = (\mathrm{x}-\mathrm{a})(\mathrm{x}-\mathrm{b})(\mathrm{x}-\mathrm{c}) \ldots (\mathrm{x}-\mathrm{l})$. (p. 257)

- Para dar ejemplos y realizar los cálculos de los ejercicios propuestos, mediante números y símbolos, se usan representaciones numéricas (Figura 5-96).

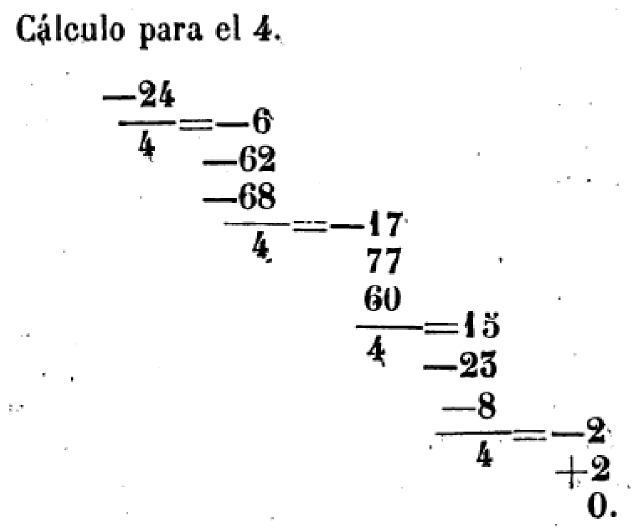


Figura 5-96. Representación numérica sobre la comprobación de la raíz de una ecuación en el Tratado de Álgebra (Cortázar, 1849, p. 284)

- Para esquematizar los pasos de un algoritmo, se usan representaciones de notaciones algorítmicas (Figura 5-97).

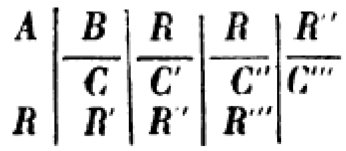


Figura 5-97. Uso del esquema en el *Tratado de Álgebra* (Cortázar, 1849, p. 210)

Fenomenología

Se han encontrado dos tipos de fenómenos o contextos, los fenómenos estrictamente matemáticos, tanto aritméticos como algebraicos.

La obra se desarrolla en un contexto fundamentalmente matemático a la hora de dar explicaciones de las operaciones, realizar demostraciones, enunciar ejemplos y proponer ejercicios y problemas. Se manifiestan de dos tipos distintos:

- Fenómenos aritméticos: se usan para resolver ejercicios y problemas de tipo aritmético (Figura 5-98).

Ejemplo. ***Hallar las reducidas de la fraccion continua***

$$1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}}}}}.$$

Figura 5-98. Fenómeno aritmético sobre las fracciones reducidas de una fracción continua en el *Tratado de Álgebra* (Cortázar, 1849, p. 218)

- Fenómenos algebraicos: se usan para resolver ejercicios y problemas de tipo algebraico (Figura 5-99).

Ejemplo. **Hallar el *m. c. d.* de los polinomios**

$$A=45x^5-135x^4+90x^3-45x^2+135x-90,$$
$$B=30x^4-150x^3+300x^2-300x+120.$$

Figura 5-99. Fenómeno algebraico sobre el cálculo del máximo común divisor de dos polinomios en el *Tratado de Álgebra* (Cortázar, 1849, p. 241)

Estrategias didácticas

Al tratarse de una obra destinada al estudio del Álgebra en niveles universitarios, el rigor y la precisión que aplica en el contenido matemático, es mayor si cabe al de sus obras elementales destinadas a los estudios de la segunda enseñanza (RP).

Es por ello que las aplicaciones incluidas en la obra son de tipo estrictamente matemático. Prueba de ello es el uso del método para hallar en fracción continua una cantidad determinada para construir tablas de logaritmos; el uso del método del cálculo del máximo común múltiplo de dos polinomios para simplificar fracciones algebraicas; el uso del desarrollo del binomio de Newton para calcular las raíces n-ésimas de los números; y, el uso del desarrollo de las series exponenciales y logarítmicas para construir tablas de logaritmos neperianos y decimales (APL).

Como el propio autor señala, los procedimientos para el cálculo de las raíces de toda ecuación pueden resultar al alumno, tediosos y complejos. Por ese motivo, Cortázar detalla paso a paso el algoritmo o método general, incluye métodos y técnicas que ayudan al alumno a disminuir el número de pasos a seguir e incluye numerosos ejemplos resueltos de cada uno de ellos, así como de la completa aplicación del método. Este procedimiento los aplica también al resto de contenidos, como, por ejemplo, el cálculo del máximo común divisor de varios polinomios (SPM).

La obra contiene asimismo numerosas sugerencias o *métodos breves* para acelerar los cálculos numéricos. En el caso del cálculo del valor numérico del primer miembro de una ecuación $f(x) = 0$, siendo $f(x) = Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F$, en el caso en el que $x = a$, propone realizar el cálculo desarrollado en la Figura 5-100 (SPM).

$$\left\{\left[\left((Aa+B)a+C\right)a+D\right]a+E\right\}a+F.$$

Figura 5-100. Método breve para calcular el valor numérico del primer miembro de una ecuación en el Tratado de Álgebra (Cortázar, 1849, p. 255)

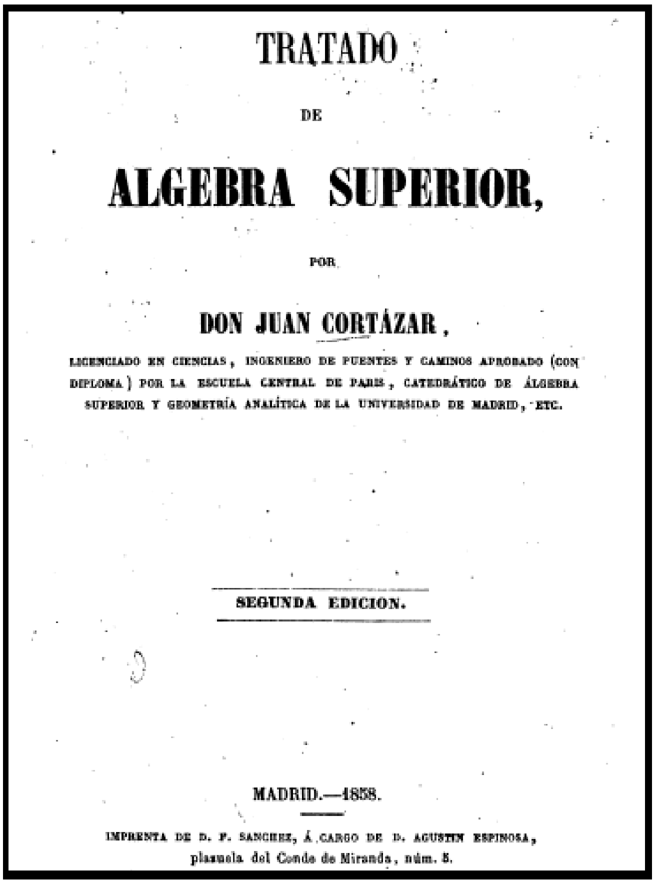
5.4.2.2. Periodo 3 (1857-1873): Segunda edición

La segunda edición de la obra fue impresa en Madrid en 1858 en la Imprenta de D. F. Sánchez, a cargo de D. Agustín Espinosa (CE2 y CE3). Este ejemplar está digitalizado por el repositorio Google Books, forma o ha formado parte de The New York Public Library y puede encontrarse en la Biblioteca de la Universidad Politécnica de Madrid (CE4).

Ya en esta edición, el *Tratado de Álgebra superior* se publica separadamente del *Tratado de Álgebra elemental*, de 234 páginas, dividido en seis libros. Éstos, a su vez, están divididos en un total de 17 capítulos. Son eliminados algunos capítulos de la primera edición como la resolución de dos o más ecuaciones de grado superior o la resolución trigonométrica de las ecuaciones binomias por encontrarse ya incluidas en el *Tratado de Trigonometría y Topografía*, buscando que no se dupliquen contenidos entre los diferentes tratados (CE5).

Por otro lado, se añaden capítulos sobre resolución de ecuaciones trascendentes y sus aplicaciones, como el cálculo de máximos y mínimos de una función o la descomposición de fracciones raciones en fracciones simples. Al final del tratado se incluye una nota que analiza las soluciones de ecuaciones y sistemas de primer grado con mayor número de incógnitas (CE6)

Debido a los cambios producidos en algunos capítulos aparecen las referencias a Machi el cual halló las primeras cien cifras del número π mediante el desarrollo por series de funciones de $arc\, tg\ (x)$ o las tablas de Callet o de Calbet para calcular los valores exponenciales de base e, además de las que aparecen en la primera edición (CE7). Además, podemos observar un cambio significativo en el lenguaje al cambiar las palabras *comensurable* e *incomensurable* por las actuales, *conmensurable* e *inconmensurable* (CE8).



TRATADO

DE

ALGEBRA SUPERIOR,

POR

DON JUAN CORTÁZAR,

LICENCIADO EN CIENCIAS, INGENIERO DE PUENTES Y CAMINOS APROBADO (CON DIPLOMA) POR LA ESCUELA CENTRAL DE PARIS, CATEDRÁTICO DE ÁLGEBRA SUPERIOR Y GEOMETRÍA ANALÍTICA DE LA UNIVERSIDAD DE MADRID, ETC.

SEGUNDA EDICION.

MADRID.—1858.

IMPRENTA DE D. F. SANCHEZ, Á CARGO DE D. AGUSTIN ESPINOSA, plazuela del Conde de Miranda, núm. 5.

Figura 5-101. Portada del *Tratado de Álgebra superior* (Cortázar, 1858)

Estructura conceptual

La segunda edición se caracteriza por tener los contenidos integrados dentro del capítulo correspondiente. Así como en la primera edición, el libro primero está dedicado a definir y demostrar las propiedades de las cantidades primas, máximo común divisor y múltiplo más simple de varias cantidades enteras, en ésta edición se eliminan los conceptos que no intervienen directamente en la resolución de ecuaciones y el máximo común divisor de dos polinomios aparece en el libro tercero previo a la aplicación de la teoría de las raíces iguales.

El carácter particular de la derivada en la primera edición, que solo se aplica a las funciones enteras y racionales, se amplía en la segunda edición a las funciones exponenciales, logaritmos y funciones trigonométricas. Por tanto, si en la primera edición, la función derivada de una función se define como “el coeficiente de la primera potencia de h en el desenvolvimiento de f (x+h)” (Cortázar, 1849, p. 250), en la segunda se define como “el límite de la razon del incremento de la funcion al incremento de la variable, cuando este último se acerca á cero indefinidamente” (p. 21).

Esto le permite demostrar las fórmulas de las derivadas de funciones enteras y racionales, logarítmicas, exponenciales y trigonométricas mediante la definición. Asimismo, obtiene las fórmulas de la derivada de la suma, producto y quebrado de funciones.

Con respecto al teorema de Taylor, se demuestra en este caso como igualdad para funciones de una, dos y tres variables y, en el último libro se generaliza para las funciones que pueden desarrollarse en series de potencias como muestra la Figura 5-102.

$$\varphi(x+h)=\varphi(x)+h\,\varphi'(x)+\frac{h^2}{2}\,\varphi''(x)+\frac{h^3}{2.3}\,\varphi'''(x)+\text{etc.}$$

Figura 5-102. Teorema de Taylor en el *Tratado de Álgebra superior* (Cortázar, 1858, p. 168)

En la primera edición, se señala explícitamente que el tratado solo se ocupará de las ecuaciones algebraicas, sin embargo, en la segunda edición, se amplían los contenidos necesarios para poder añadir un último libro dedicado a la resolución de las ecuaciones trascendentes.

En uno de los ejemplos comunes a ambas ediciones, que sirven para ilustrar la separación de raíces inconmensurables de una ecuación, encontramos un cambio de notación. Mientras que, en la primera edición, se usan los valores $3, 3\frac{1}{10}, 3\frac{2}{10}, 3\frac{3}{10}, \dots, 4$ en la segunda edición se usan los valores 3; 3,1; 3,2; 3,3; …4.

Presentamos el mapa conceptual (Figura 5-103) correspondiente al contenido de la segunda edición de la obra en el que se ilustran los cambios producidos con respecto a la primera.

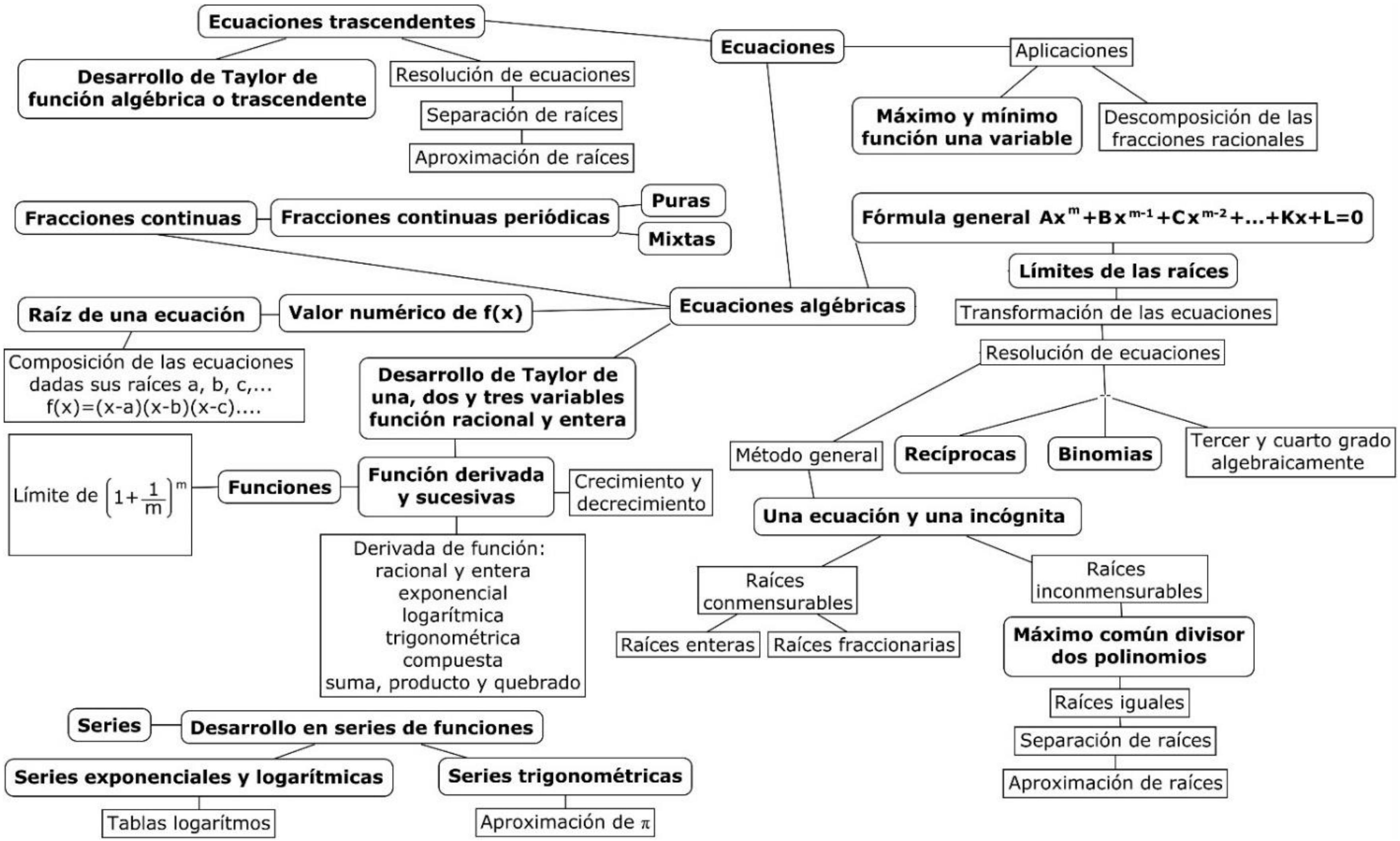


Figura 5-103. Mapa conceptual del *Tratado de Álgebra superior* (1858)

Sistemas de representación

La edición no presenta cambios con respecto a los sistemas de representación.

Fenomenología

Como se señala en el prólogo de la obra, en esta edición se incluye una nota sobre el análisis de la indeterminada de primer grado. Por ello, además de los fenómenos de tipo aritmético y algebraico que se encuentran en la primera edición, en esta ocasión se usan situaciones de tipo geométrico, comercial y de equivalencia entre medidas:

- Fenómenos geométricos: se usan para resolver los problemas de máximos y mínimos de funciones de una variable. Por ejemplo, "¿Cuál es el mayor rectángulo que puede inscribirse en un círculo? (p. 185).
- Fenómenos comerciales: para calcular variables implicadas en una compra o una venta, como precios de compra o venta, unidades compradas o vendidas. Por ejemplo, "Entre varios hombres y mujeres han gastado 330 reales en una fiesta: cada hombre y ha pagado 16 reales y cada mujer 9 reales, ¿cuántos hombres y mujeres había?" (p. 222).
- Fenómenos de equivalencia entre medidas: para encontrar la equivalencia entre determinadas medidas. Por ejemplo, "Componer 500 reales con duros y napoleones" (p. 222).

Estrategias didácticas

En contraposición con la primera edición, el prólogo de la segunda, justifica los contenidos que se incluyen en ella, así como los cambios realizados con respecto a la primera (SCO). En este sentido, el autor señala que

> hemos suprimido, como materia poco importante en la práctica, la resolución de dos ó mas ecuaciones de grado superior al segundo con igual número de incógnitas, y cuanto á esta cuestion se refiere. Tambien hemos suprimido la resolución trigonométrica de las ecuaciones binomias, por evitar repeticiones, pues esta resolucion se halla en el complemento de nuestro tratado de trigonometría.

Los cambios incorporados en esta edición, también amplían el número de aplicaciones matemáticas incluidas en ella. Así, se incluyen el cálculo de los valores máximos y mínimos de las funciones de una variable o la descomposición de fracciones raciones en fracciones simples, teoría necesaria en la integración de funciones racionales. Asimismo, la inclusión de series trigonométricas en el apartado de desarrollo en series de funciones, hace posible el cálculo de la aproximación del número π (APL).

Conclusiones

La desaparición de las listas de texto oficiales publicadas por el Gobierno a partir de 1868 empujó a profesionales y profesores a publicar sus propios libros de texto como complemento a sus retribuciones (Vea y Velamazán, 2011). El aumento de la competitividad unido a la tardía introducción de asignaturas de Matemáticas en los estudios de nivel universitario y el escaso número de alumnos matriculados en ellas, provocó que los tratados superiores de Cortázar no tuvieran una acogida tan buena como los tratados elementales.

La formalidad y rigurosidad matemática seguida en el *Tratado de Álgebra elemental* se extiende y amplía para el caso del *Álgebra superior*. No obstante, el rigor del lenguaje matemático no impide que los algoritmos, como los del máximo común divisor de varios polinomios o la resolución de ecuaciones de cualquier grado, sean detallados paso a paso, se incluyan reglas o *métodos breves* para reducir el número de pasos del algoritmo o se propongan ejemplos mostrando cada una de las situaciones a las que se puede enfrentar el alumno.

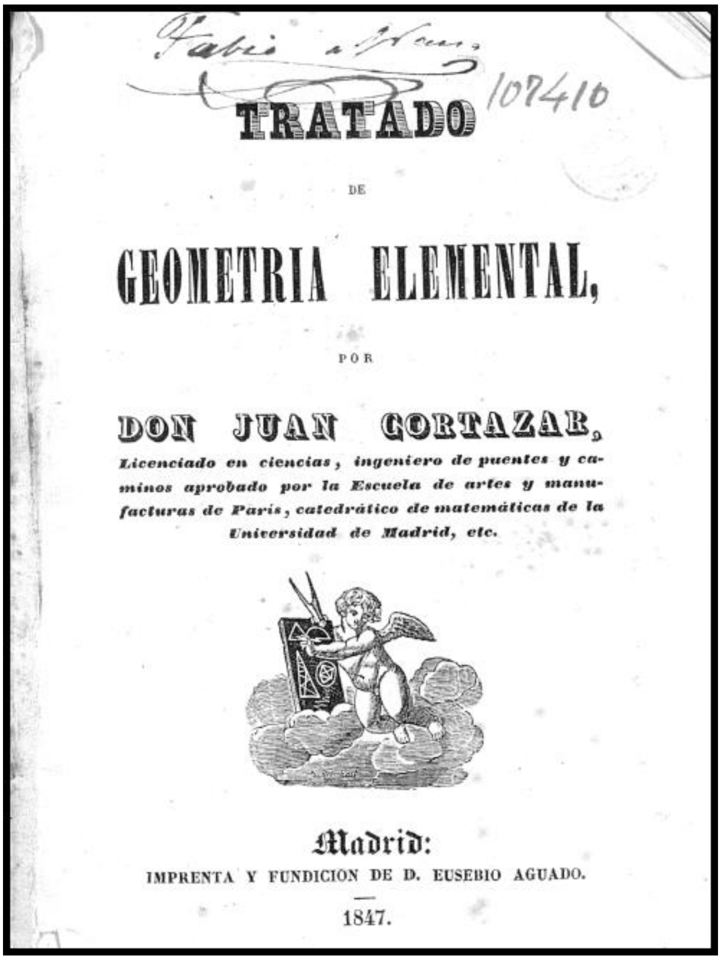
El análisis de contenido de la primera edición, refleja que el uso de situaciones y contextos en ejemplos, ejercicios y problemas, se reduce al ámbito estrictamente matemático, ya sea al trabajar con expresiones algebraicas, ecuaciones o series. Sin embargo, la adicción de contenidos sobre resolución de ecuaciones en la segunda edición, amplía el uso de fenómenos asociados a situaciones comerciales, de equivalencias entre medidas y monedas y fenómenos matemáticos de tipo geométrico.

En la exposición de los contenidos de la obra, predomina el lenguaje verbal y algebraico desde el punto de vista de los sistemas de representación. Debido a que se trata de uno de los textos de más nivel matemático dentro de la producción de Cortázar, no se recurre a las representaciones de tipo gráfico en ningún caso.

5.5. Obra: *Tratado de Geometría elemental*

5.5.1. Caracterización de la obra

La primera edición del *Tratado de Geometría elemental* (CO1) se publicó 1847, la última de ellas, la trigésimo séptima edición, salió a la luz en 1917 (CO2, CO3 y CO4). A partir de la novena, se anuncia en la portada que la obra estaba señalada como libro de texto en las Universidades, Institutos y Escuelas Industriales. Fue elegida para formar parte de los listados de libros de texto para la enseñanza en secundaria en 1848 (Gaceta de Madrid de 15 de septiembre de 1848) y, además fue aprobada por la London Association for the Improvement of Geometric Teaching en 1871 (Ortiz, 1996) (CO5).



107410

TRATADO

DE

GEOMETRIA ELEMENTAL,

POR

DON JUAN CORTAZAR,

Licenciado en ciencias, ingeniero de puentes y caminos aprobado por la Escuela de artes y manufacturas de Paris, catedrático de matemáticas de la Universidad de Madrid, etc.

Madrid:

IMPRENTA Y FUNDICION DE D. EUSEBIO AGUADO.

1847.

Figura 5-104. Portada de la primera edición del *Tratado de Geometría elemental* (Cortázar, 1847)

Irueste (1912) analiza la obra y destaca la exactitud, rigurosidad y sencillez de algunos de los resultados introducidos en la obra, como el método general para trazar tangentes comunes a dos círculos, el estudio elemental de las curvas elipse, parábola y hélice, y resultados sobre la simetría de los poliedros (CO6).

Vea (1995) analiza las dos primeras ediciones y señala que el contenido de la obra está constituido por las dos partes tradicionales de la Geometría, que son la Geometría plana y la Geometría del espacio y que su única aportación es el estudio del cono y del cilindro oblicuos. Además, echa de menos el estudio de las superficies curvas, que sí se encuentra en la obra de Fernández Vallín (CO6).

5.5.2. Caracterización de las ediciones

5.5.2.1. Periodo 2 (1845-1857): Primera edición

Se presenta a continuación el análisis de la primera edición de la obra, publicada en 1847 en Madrid por la imprenta y fundición de D. Eusebio Aguado. Encontramos el ejemplar digitalizado en el repositorio Google Books, aunque también se encuentra en la biblioteca nacional de España (CE2, CE3 y CE4).

Sus 200 páginas están divididas en 10 capítulos, cinco de ellos dedicados a geometría plana y los restantes a geometría del espacio y, en la última parte del tratado podemos encontrar 8 láminas con 242 figuras que sirven de apoyo a las explicaciones y demostraciones de los teoremas. Algunos libros contienen al final un apartado con problemas propuestos. Como anexo, encontramos también dos notas, una sobre la resolución de problemas geométricos y otra sobre el cono y cilindro oblicuos (CE5). Hace uso del símbolo asterisco, aunque no aparece nota aclaratoria de su significado (CE8).

A diferencia de los tratados anteriores, se trata de una obra exclusivamente teórica, estructurada en definiciones, teoremas con respectivas demostraciones, corolarios y problemas teóricos acompañados de su solución detallada (CE5).

Tabla 5-5. *Índice del Tratado de Geometría elemental (Cortázar, 1847)*

INTRODUCCIÓN	Págs. 1-4
GEOMETRÍA PLANA	
LIBRO I - LÍNEA RECTA Y ÁNGULOS	Págs. 5- 14

Áreas de los poliedros – Áreas de los cuerpos redondos – Comparación de las áreas - Volúmenes de los poliedros – Volúmenes de los cuerpos redondos – Comparación entre los volúmenes

Se cita en el texto Euclides y su Postulado que dice que "Por un punto dado fuera de una recta no puede pasar mas que una sola paralela á dicha recta" (p. 12), a Lambert, el cual fue el primero en demostrar que "la razon de la circunferencia diámetro es un número incomensurable" (p. 98) y a Arquímedes y Mecio por sus respectivas aproximaciones al número π. Sin embargo, hallamos referencias continuas a sus tratados de *Aritmética* y *Álgebra elemental* (CE7).

Estructura conceptual

La introducción del tratado contiene las definiciones de las nociones previas necesarias para el buen seguimiento del tratado. En ella, se define geometría, como "la ciencia que enseña á resolver los problemas de la estensión." (p. 3). Sin embargo, el autor destaca que el objeto de estudio del tratado corresponde a la geometría elemental, que "solo se ocupa de la línea recta y de la circunferencia, de las superficies planas terminadas por estas líneas, de ciertas superficies curvas que se originan de ellas, y de los espacios terminados por estas superficies" (p. 3) (CCGE1).

Por ello, se definen los conceptos de:

- Línea, como cada uno de "Los límites de las superficies" (p. 1) (CCGE2),
- Circunferencia, como "línea curva cerrada, cuyos puntos están todos en un plano, y equidistan de un punto interior llamado centro" (p. 3) (CCGE2) y
- Círculo, como "la porción del plano limitada por la circunferencia" (p. 3). Añade a la definición que "A veces á la circunferencia se le da tambien el nombre de círculo" (p. 3) (CCGE2).

Sin especificarlo, Cortázar denota a la línea mediante dos letras mayúsculas y la nombra AB (Figura 5-105) (CCGE2).

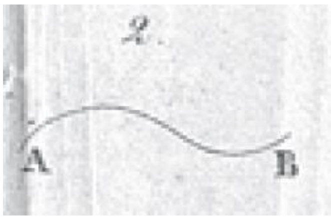


Figura 5-105. Representación de una línea curva en el *Tratado de Geometría elemental* (Cortázar, 1847, lámina 1ª)

El libro I de la primera parte titulado *Línea recta y ángulos*, comienza definiendo ángulo como "la separación ó abertura de dos rectas indefinidas CA y CB (fig. 4) que se encuentran en un punto C, llamado vértice del ángulo" (p. 5). Asimismo, se establece su notación: "Un ángulo se designa leyendo tres letras, una de cada lado y la del vértice, colocando esta en medio. Si un ángulo está solo, se puede designar con la letra del vértice. Asi, el ángulo formado por las rectas CA y CB, se designará ACB ó BCA ó C." (p. 5) (Figura 5-106) (CCGE2).

Figura 5-106. Representación de un ángulo en el *Tratado de Geometría elemental* (Cortázar, 1847, lámina 1ª)

Las notaciones para nombrar líneas y ángulos se usan para representar tanto al elemento geométrico en sí, como para denotar su medida.

En las siguientes páginas, se desarrolla la teoría sobre ángulos, basándose en las relaciones existentes entre los cuatro ángulos que se forman al trazar dos líneas perpendiculares, dos líneas secantes o dos líneas paralelas. Se deduce de los enunciados, la notación atribuida al triángulo, aunque no se especifica en ningún momento.

El libro II comienza con la definición de polígono como "la porcion de plano terminada por líneas rectas" (p. 14) e indica la clasificación de los polígonos en función del número de lados (Figura 5-107) (CCGE2).

Se llama *triángulo* el polígono que tiene tres lados; *cuadrilátero* el polígono que tiene cuatro lados; *pentágono* el que tiene cinco; *exágono* el que tiene seis; *eptágono* el que tiene siete; *octógono* el que tiene ocho; *eneágono* el que tiene nueve; *decágono* el que tiene diez; *endecágono* el que tiene once; *dodecágono* el que tiene doce; *pentedecágono* el que tiene quince.

Figura 5-107. Clasificación de los polígonos según lados en el *Tratado de Geometría elemental* (Cortázar, 1847, p. 14)

El estudio de los polígonos comienza con el triángulo. Señala las partes de las que consta un triángulo, su clasificación según sus ángulos y enuncia y demuestra las concernientes a los triángulos.

A continuación, se estudian los cuadriláteros y, en particular los paralelogramos. Tras enunciar y demostrar sus propiedades, define rectángulo, cuadrado y rombo, de acuerdo a sus características. Así, define rectángulo como “el paralelógramo cuyos ángulos son rectos” (p. 28), “Cuadrado es un rectángulo cuyos cuatro lados son iguales” (p. 28) y “Se llama rombo un paralelógramo cuyos cuatro lados son iguales, y cuyos ángulos no son rectos” (p. 28). Antes de finalizar el capítulo, define trapecio como “un cuadrilátero ABCD (fig. 42) que tiene dos lados paralelos, y los otros dos no” (p. 29) (Figura 5-108).

Sin especificarlo, Cortázar denota a los polígonos nombrando sus vértices y con letras mayúsculas (CCGE2).

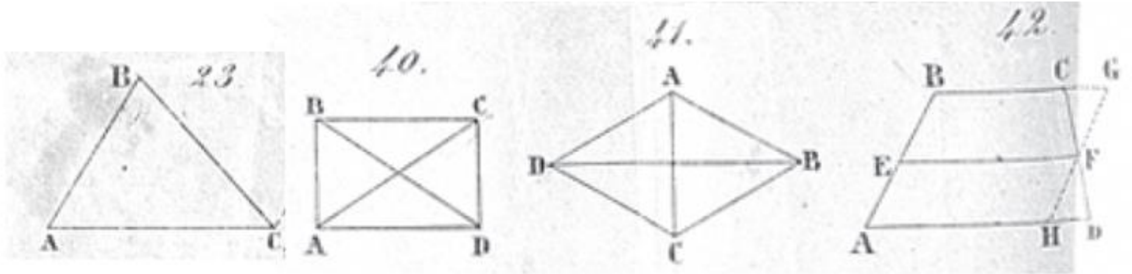


Figura 5-108. Representación de polígonos en el *Tratado de Geometría elemental* (Cortázar, 1847, láminas 1ª y 2ª)

El libro III estudia las relaciones y posiciones relativas entre las líneas rectas y las circunferencias, así como, las medidas de los ángulos de estas.

Al término de los tres primeros libros, se incluye una relación de problemas sobre ángulos, líneas, polígonos y circunferencias y sus correspondientes soluciones, explicadas tanto analítica como geométricamente (CCGE2). Se clasifican en:

- Construcción de rectas perpendiculares a otra dada, bajo ciertas condiciones. Por ejemplo, "Desde un punto D dado fuera de una recta AB, bajar una perpendicular á esta recta" (p. 47) (Figura 5-109).

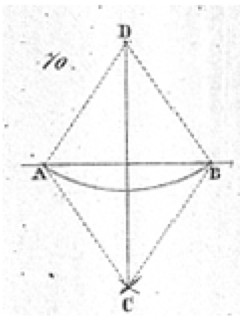


Figura 5-109. Resolución gráfica problema 3 en el *Tratado de Geometría elemental* (Cortázar, 1847, lámina 3ª)

- Construcción de rectas que formen un ángulo dado, bajo ciertas condiciones. Por ejemplo, "Dado un ángulo A, una recta DF y un punto D en ella, tirar por este punto otra recta que forme con la recta dada un ángulo igual al dado" (p.48) (Figura 5-110).

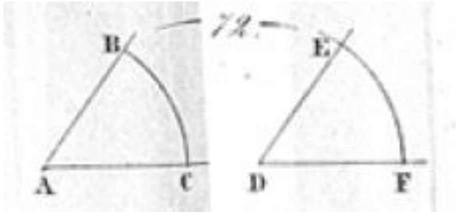


Figura 5-110. Resolución gráfica problema 5 en el *Tratado de Geometría elemental* (Cortázar, 1847, lámina 3ª)

- Construcción de rectas paralelas a otra dada, bajo ciertas condiciones. Por ejemplo, "Por un punto G, dado fuera de una recta CD, tirar otra recta que forme con la primera un ángulo igual á u ángulo dado" (p. 49) (Figura 5-111).

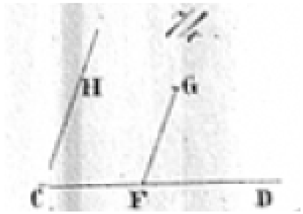


Figura 5-111. Resolución gráfica problema 7 en el *Tratado de Geometría elemental* (Cortázar, 1847, lámina 3ª)

- Construcción de triángulos bajo ciertas condiciones. Por ejemplo, "Dados dos lados m, n y el ángulo comprendido K de un triángulo, construir este triángulo" (p. 49) (Figura 5-112).

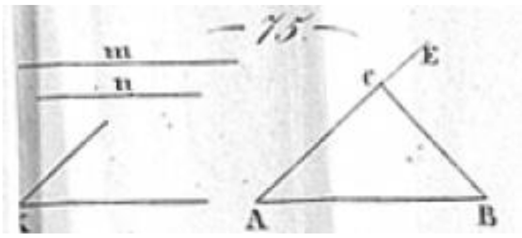


Figura 5-112. Resolución gráfica problema 8 en el *Tratado de Geometría elemental* (Cortázar, 1847, lámina 3ª)

- Construcción de circunferencias circunscritas e inscritas a un triángulo dado. Por ejemplo, "Circunscribir un círculo á un triángulo ABC, es decir, trazar una circunferencia que pase por los tres vértices del triángulo" (p. 53) (Figura 5-113).

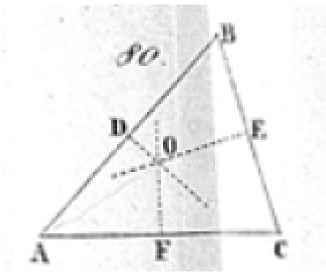


Figura 5-113. Resolución gráfica problema 13 en el *Tratado de Geometría elemental* (Cortázar, 1847, lámina 3ª)

- Determinación de un punto que verifica ciertas condiciones (Figura 5-114). Por ejemplo,

> Dada una recta CD y dos puntos A y B á un mismo lado de ella, hallar un punto en la recta, tal que si desde él se tiran dos rectas á los dos puntos dados, los ángulos que estas rectas forman con la recta dad sean iguales entre sí. (p. 54)

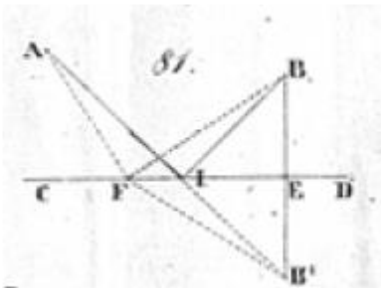


Figura 5-114. Resolución gráfica problema 15 en el *Tratado de Geometría elemental* (Cortázar, 1847, lámina 3ª)

- Construcción de rectas tangentes a una circunferencia bajo ciertas condiciones. Por ejemplo, "Por un punto dado en una circunferencia, tirar una tangente á dicha circunferencia" (p. 55).
- División de un ángulo en partes iguales siendo las partes múltiplos de dos. Por ejemplo, "Dividir un ángulo BAC en dos partes iguales" (p. 56) (Figura 5-115).

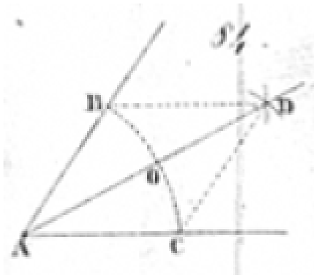


Figura 5-115. Resolución gráfica problema 19 en el *Tratado de Geometría elemental* (Cortázar, 1847, lámina 3ª)

- Determinación de la razón entre la medida de dos rectas o la medida de una recta. Por ejemplo, "Dadas dos rectas comensurables AB y CD, hallar su mayor medida comun, y la razon de dichas rectas" (p. 57) (Figura 5-116).

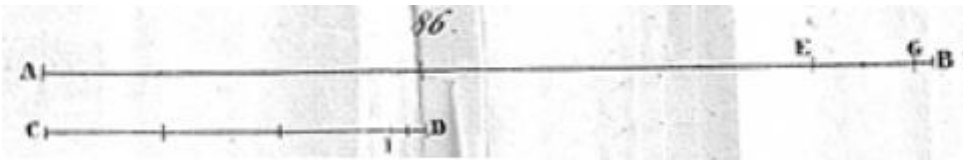


Figura 5-116. Resolución gráfica problema 21 en el *Tratado de Geometría elemental* (Cortázar, 1847, lámina 3ª)

La semejanza de polígonos se estudia en el libro IV. Previamente se estudian y demuestran los resultados sobre líneas proporcionales. Para ello, demuestra la proporcionalidad que existe entre las divisiones que se crean entre los lados de polígonos, mediante trazos de líneas paralelas a los lados.

A continuación, define triángulos semejantes como aquellos triángulos "que tienen sus ángulos respectivamente iguales y sus lados homólogos proporcionales" (p. 64) (CCGE3) entendiendo lados homólogos a los "lados opuestos á ángulos iguales" (p. 64).

Tras demostrar la existencia de estos y sus resultados correspondientes, pasa a deducir y demostrar las consecuencias de la semejanza de triángulos. Entre estas consecuencias, se halla el teorema de Pitágoras (Figura 5-117), que Cortázar demuestra gracias a la relación de proporcionalidad existente entre los catetos, la hipotenusa y la proyección de cada cateto sobre la hipotenusa en triángulos rectángulos.

TEOREMA 69, *llamado de Pitágoras (fig. 98).*

En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa AC *es igual á la suma de los cuadrados de los catetos* AB *y* CB.

Figura 5-117. Teorema de Pitágoras en el *Tratado de Geometría elemental* (Cortázar, 1847, p. 71)

En este caso, añade dos ejemplos de aplicación del teorema (CCGE3) que consisten en:

- determinar el valor de la hipotenusa, conocidas las medidas de los catetos y,
- determinar el valor de uno de los catetos, conocidos el valor de la hipotenusa y el valor del otro cateto.

El siguiente capítulo comienza con la definición de polígonos semejante, como aquellos polígonos que "además de tener sus ángulos respectivamente iguales, tienen sus lados homólogos proporcionales" (p. 73) (CCGE3) entendiendo por lados homólogos como "los lados adyacentes á ángulos iguales" (p. 73). Análogamente al caso de los triángulos, demuestra la existencia de polígonos semejantes y resultados correspondientes.

El último capítulo del libro incluye los resultados y sus respectivas demostraciones, sobre el polígono regular, definido como el que "tiene todos sus lados iguales y todos sus ángulos también iguales" (p. 75).

Al finalizar el cuarto libro, se incluye una relación de problemas resueltos relativos a la semejanza de polígonos (CCGE3). Se clasifican en:

- Hallar rectas o partes proporcionales de una o varias rectas, bajo unas condiciones dadas. Por ejemplo, "Dividir una recta EF en partes proporcionales á las de otra recta AB" (p. 90) (Figura 5-118).

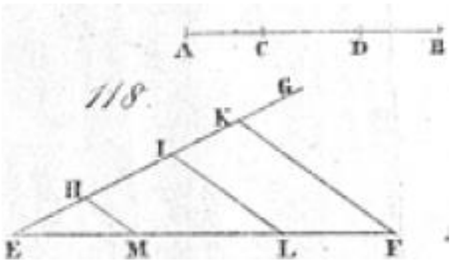


Figura 5-118. Resolución gráfica problema 25 en el *Tratado de Geometría elemental* (Cortázar, 1847, lámina 4ª)

- Construcción de polígonos semejantes, bajo unas condiciones dadas. Por ejemplo, "Sobre una recta dada, considerada como lado homólogo de un lado de un polígono dado, construir un polígono semejante al dado" (p. 92) (Figura 5-119).

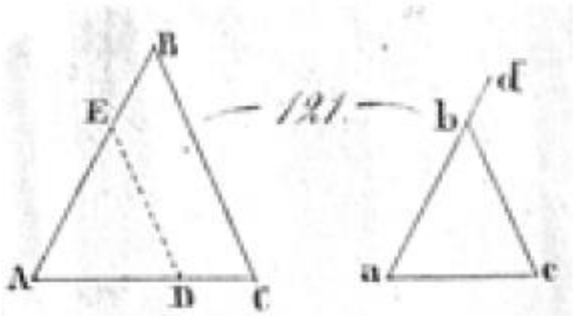


Figura 5-119. Resolución gráfica problema 29 en el *Tratado de Geometría elemental* (Cortázar, 1847, lámina 4ª)

- Construir polígonos inscritos y circunscritos en circunferencias, bajo unas condiciones dadas. Por ejemplo, "Dado un lado de un polígono regular inscrito, hallar el valor del lado del polígono semejante circunscrito" (p. 95) (Figura 5-120).

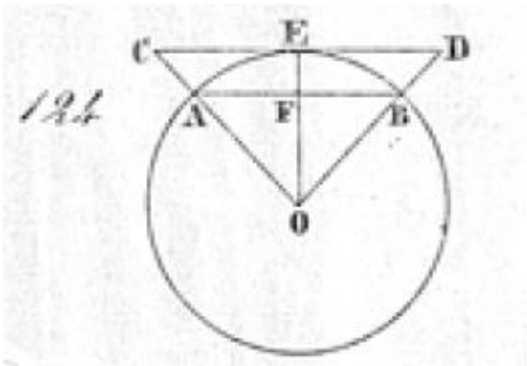


Figura 5-120. Resolución gráfica problema 36 en el *Tratado de Geometría elemental* (Cortázar, 1847, lámina 4ª)

- Cálculo de los perímetros de polígonos semejantes a los dados, bajo unas condiciones dadas. Por ejemplo, "Dados los perímetros p, P de dos polígonos regulares semejantes inscrito y circunscrito, hallar los perímetros p', P' de dos polígonos semejantes inscrito y circunscrito de duplo número de lados" (p. 97) (Figura 5-121).

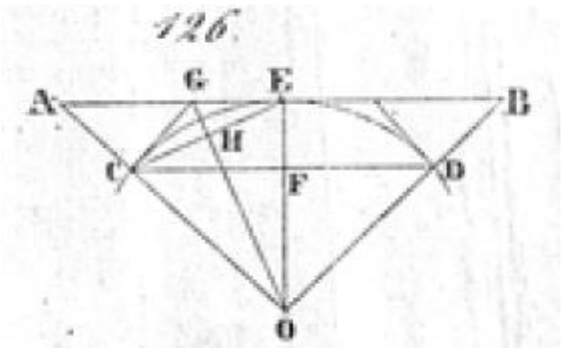


Figura 5-121. Resolución gráfica problema 38 en el *Tratado de Geometría elemental* (Cortázar, 1847, lámina 4ª)

- Búsqueda de las relaciones entre el valor del diámetro, el radio, la longitud, el valor de π, la longitud y amplitud de un arco de una circunferencia dada. Por ejemplo, "Dado el radio, hallar la circunferencia, y al contrario" (p. 99).

Las áreas de los polígonos y del círculo son estudiadas en el libro V. En primer lugar, se define área de una superficie como "la medida de esta superficie" (p. 101) (CCGE4). Se especifica también que, para medir una superficie, "se toma por unidad un cuadrado" (p. 101).

A continuación, se enuncia y demuestran los resultados relativos al cálculo de áreas del rectángulo, del paralelogramo, del triángulo, del trapecio, de un polígono regular cualquiera, círculo, sector circular y segmento circular.

El estudio de las relaciones de proporcionalidad entre áreas de polígonos semejantes, le lleva al enunciado del teorema de Pitágoras en diferentes términos: "El cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es equivalente á la suma de cuadrados construidos sobre los catetos" (p. 114) (Figura 5-122).

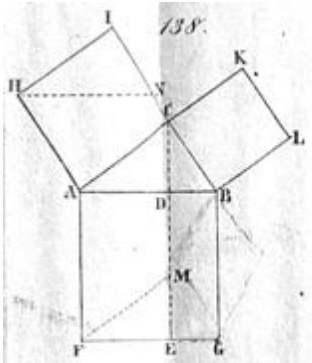


Figura 5-122. Demostración del teorema de Pitágoras en el *Tratado de Geometría elemental* (Cortázar, 1847, lámina 4ª)

A continuación, se incluye una relación de problemas resueltos relativos a las áreas de polígonos y circunferencias (CCGE4). Se clasifican en:

- Construcción de un polígono de área equivalente a otro, bajo unas condiciones dadas. Por ejemplo, "Reducir un polígono a triángulo equivalente" (p. 117).
- Construcción de un polígono semejante al dado cuyas áreas verifiquen una relación de proporcionalidad dada. Por ejemplo, "Dado un polígono, construir otro semejante con el cual está el primero en la razon de m á n" (p. 119) (Figura 5-123).

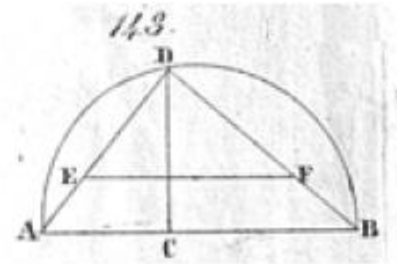


Figura 5-123. Resolución gráfica problema 47 en el *Tratado de Geometría elemental* (Cortázar, 1847, lámina 4ª)

Uno de los problemas que se plantean en la relación anterior, consiste en "Reducir un círculo á cuadrado equivalente" (p. 118). Cortázar lo resuelve de manera aproximada construyendo el cuadrado inscrito a la circunferencia, tras la cual añade una nota que reza: "Para poder resolver con exactitud este problema, que es el de la *cuadratura del círculo*, sería menester poder construir una recta exactamente igual á la circunferencia rectificada. Esto no se ha conseguido todavía, y muy probablemente no se conseguirá nunca" (pp. 118-119).

El segundo bloque del tratado, comienza con el estudio de planos, ángulos diedros y poliedros. En la introducción, se define plano o superficie como "aquella superficie, en la cual tomando dos puntos cualesquiera, la recta que pasa por ellos coincide enteramente con la superficie" (p. 2) (Figura 5-124) (CCGE5). La notación usada para denotar a los planos consiste en dos letras mayúsculas y los nombra como el *plano MN* (CCGE5).

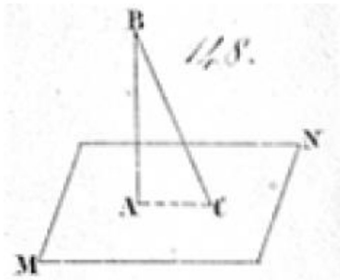


Figura 5-124. Representación y notación de un plano en el *Tratado de Geometría elemental* (Cortázar, 1847, lamina 5º)

En los dos primeros capítulos del libro I del bloque de Geometría del espacio, se enuncian y demuestran los resultados relativos a las relaciones entre planos y rectas, paralelas, perpendiculares y oblicuas, así como las medidas de los ángulos que forman entre sí.

A continuación, se define ángulo diedro como “la separacion ó abertura de dos planos ABC, DBC (fig. 166) que se cortan” (p. 133) (Figura 5-125) (CCGE5). Por otro lado, señala los nombres de las partes de un ángulo diedro y los designa “con las dos letras de la arista: asi, el ángulo formado por los planos ABC y DBC se designará el ángulo BC” (p. 133) (CCGE5).

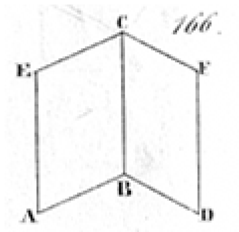


Figura 5-125. Representación de un ángulo diedro en el *Tratado de Geometría elemental* (Cortázar, 1847, lamina 5º)

No obstante (CCGE5),

> Si varios ángulos diedros tienen la misma arista, se designa cada uno con cuatro letras, una de cada cara, y las dos de la arista se colocan en medio: asi, el ángulo diedro, cuyas caras son ABC y DBC (fig. 167), se designará ABCD; el diedro, cuyas caras son ABC y EBC, se designará ABCE. (p. 133)

Para finalizar el capítulo, se enuncian y demuestran los resultados y teoremas relativos a ángulos diedros.

Posteriormente, se define ángulo poliedro o ángulo sólido como “la abertura de tres ó mas planos que concurren en un punto” (pp. 141) (CCGE5). También se señalan los nombres de las partes del ángulo poliedro y cómo se designa: “Un ángulo poliedro se enuncia con la letra del vértice, ó con dicha letra seguida de otra de cada arista” (p. 141) (CCGE5).

Análogamente al caso de los ángulos diedros, el capítulo continúa con los enunciados y demostraciones de los teoremas relativos a ángulos poliedros.

El libro segundo de la Geometría del espacio estudia los poliedros, que definen como “el cuerpo terminado por polígonos: estos polígonos se llaman caras del poliedro” (p.

152) (CCGE5). Asimismo, se indica el nombre de los poliedros según el número de caras (Figura 5-126).

Se llama *tetraedro* el poliedro que tiene cuatro caras; *pentaedro* el que tiene cinco caras; *exaedro* el que tiene seis; &c.

Figura 5-126. Clasificación de los poliedros según número de caras en el *Tratado de Geometría elemental* (Cortázar, 1847, p. 152)

El siguiente capítulo del libro II están dedicados al estudio de las pirámides, prismas y poliedros simétricos. Para ello, se define:

- Pirámide como “el poliedro cuyas caras son un polígono cualquiera llamado base, y varios triángulos que tienen un mismo vértice” (p. 152) (CCGE5).
- Prisma como “el poliedro cuyas caras son dos polígonos paralelos é iguales, y paralelógramos todas las demás” (p. 155) (CCGE5). En particular, se define paralepípedo al “prisma cuya base es un paralelogramo” (p. 156) (CCGE5).

A continuación, se nombran las partes de las pirámides y prismas, se clasifican según el número de lados de las bases y se indican las condiciones necesarias para que una pirámide o un prisma sean regulares o truncados. Posteriormente, se enuncian y demuestran los resultados relativos a ambos tipos de poliedros y a los poliedros simétricos, que son aquellos que pueden colocarse “de modo que todos los vértices del uno sean respectivamente simétricos de los del otro” (p. 159).

El siguiente libro, el libro III, abarca el estudio de los tres cuerpos redondos, es decir, el cono, el cilindro y la esfera (Figura 5-127). Para ello, se define:

- Cono, como “el cuerpo engendrado por un triángulo rectángulo VCA (fig. 197) que gira al rededor de uno de los catetos VC” (p. 162) (CCGE5).
- Cilindro, como “el cuerpo engendrado por un rectángulo ABOP (fig. 199) que gira al rededor de uno de sus lados PO” (p. 164) (CCGE5).
- Esfera, como “el cuerpo engendrado por un semicírculo ABC (fig. 201) que gira al rededor de su diámetro AC” (p. 166) (CCGE5).

Posteriormente, se señalan los nombres de cada una de las partes de los tres cuerpos redondos y se enuncian y demuestran los teoremas relativos a estos.

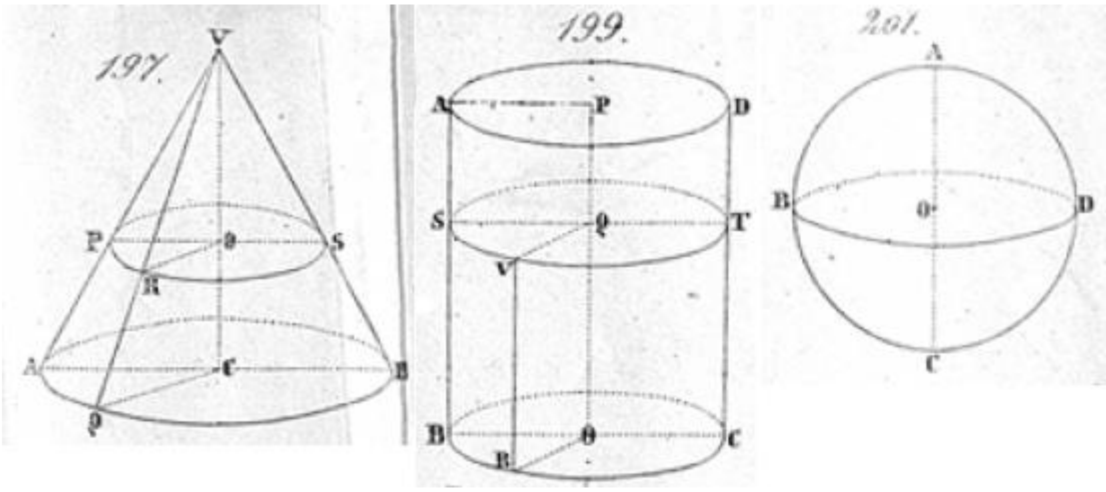


Figura 5-127. Representación de cuerpos redondos en el *Tratado de Geometría elemental* (Cortázar, 1847, lámina 7ª)

El libro IV estudia la existencia de los cinco poliedros regulares, entendiendo por poliedros regulares, aquellos "cuyas caras son todas polígonos regulares é iguales, y cuyos ángulos diedros son todos iguales" (p. 183) (Figura 5-128) (CCGE5).

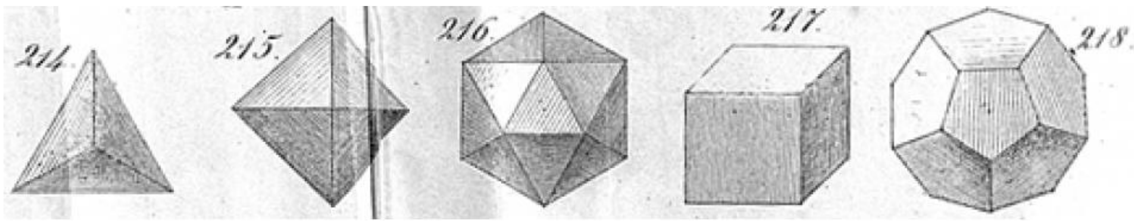


Figura 5-128. Representación de los poliedros regulares en el *Tratado de Geometría elemental* (Cortázar, 1847, lámina 7)

El libro V está dedicado al cálculo de áreas y volúmenes de cuerpos en el espacio. Los primeros capítulos enuncian y demuestran los resultados relativos al cálculo de áreas de las pirámides, prismas, poliedros regulares, cono, cilindro, zona esférica, esfera y huso esférico.

El resto de capítulos estudian los volúmenes de los cuerpos, entendiendo por volumen "la medida del espacio que ocupa dicho cuerpo" (p. 203) (CCGE6). Se especifica también que "Para medir el espacio que ocupa un cuerpo, se toma por unidad un cubo" (p. 203)

(CCGE6). A continuación, se enuncian y demuestran los resultados sobre el cálculo del volumen del prisma, tetraedro, pirámide, cono, cilindro, sector esférico, esfera y segmento esférico.

El único problema planteado en el segundo bloque del tratado consiste en determinar el volumen de un tetraedro regular conocida la medida de la arista (CCGE6).

El tratado se cierra mediante dos notas que complementan la obra. La primera de ellas clasifica y aporta estrategias para resolver sobre los problemas geométricos estudiados; la segunda, sin embargo, enuncia y demuestra los resultados y teoremas relativos al cono y cilindro oblicuo (Figura 5-129).

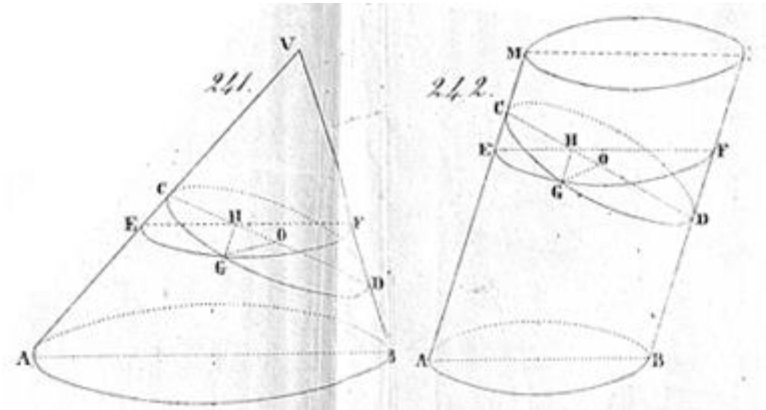


Figura 5-129. Representación del cono y el cilindro oblicuos en el *Tratado de Geometría elemental* (Cortázar, 1847, lámina 8ª)

Tras el análisis de la estructura conceptual del tratado, se presenta un mapa conceptual (Figura 5-130) del contenido de la edición en el que se ilustra el recorrido seguido, en la cual se construye con herramientas de dibujo, los elementos y propiedades de la geometría plana y la espacial.

Figura 5-130. Mapa conceptual del *Tratado de Geometría elemental* (1847)

Sistemas de representación

Se han localizado cuatro tipos de representaciones en el texto: el lenguaje verbal, las representaciones algebraicas, las representaciones numéricas y las representaciones gráficas.

- Las demostraciones de propiedades y resultados se realizan a través del lenguaje verbal, aunque apoyadas en expresiones algebraicas y gráficas. Por ejemplo: "El área de un rectángulo es igual al producto de su base por su altura" (p. 104).
- Las demostraciones de resultados y propiedades, así como los ejercicios y problemas propuestos, usan representaciones algebraicas (Figura 5-131).

Hemos demostrado (*T.* 68) que

$$AC \times AD = AB^2,$$

y que

$$AC \times CD = BC^2,$$

Sumando estas dos igualdades miembro á miembro, y separando el factor comun AC, tendremos

$$AC\ (AD+CD) = AB^2+BC^2,$$

ó bien

$$AC^2 = AB^2+BC^2.$$

Figura 5-131. Representación algebraica en el *Tratado de Geometría elemental* (Cortázar, 1847, p. 71)

- Para resolver problemas numéricos particulares, se usan representaciones numéricas (Figura 5-132).

El valor de la circunferencia es en el caso actual $3{,}14159\times 50$; la longitud de un arco de un grado de dicha circunferencia es $\frac{3{,}14159\times 50}{360}$, y la del arco de 73° será $\frac{3{,}14159\times 50\times 73}{360}$

Figura 5-132. Representación numérica en el *Tratado de Geometría elemental* (Cortázar, 1847, p. 100)

- Por último, el uso de representaciones gráficas es continuo en toda la obra, sirviendo de apoyo tanto a las demostraciones de resultados y teoremas como a la resolución gráfica de los problemas (Figura 5-133).

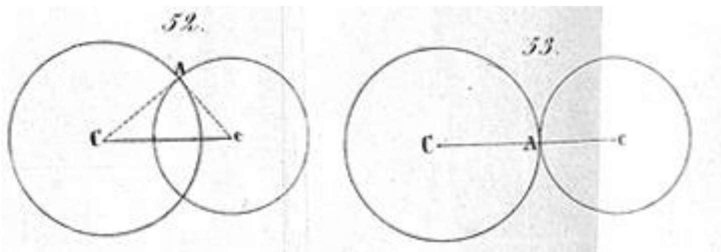


Figura 5-133. Representación gráfica en el *Tratado de Geometría elemental* (Cortázar, 1847, lámina 2ª)

Fenomenología

Debido a su carácter, el *Tratado de Geometría elemental* contiene únicamente fenómenos o contextos estrictamente matemáticos, en particular, de tipo geométrico, es decir, situaciones que se usan para resolver ejercicios y problemas de tipo geométrico. Por ejemplo: "Hallar el rádio de la base mayor de un cono troncado de bases paralelas, cuyo volúmen, altura y rádio de la base menor son respectivamente 10000 pies cúbicos, 10 pies, 5 pies" (p. 229).

Estrategias didácticas

Cortázar expresa su interés por presentar y organizar el tratado según los dos dominios del estudio de la Geometría, es decir la plana y la del espacio, entendiéndolas como la que "trata de las figuras cuyos puntos están todos en un plano" (p. 4) y la que no, respectivamente. Para ello, muestra en la introducción del tratado una tabla en la que recopila los dominios de cada bloque (Figura 5-134) (SCO).

DIVISION DE LA GEOMETRÍA.

GEOMETRÍA PLANA.	GEOMETRÍA DEL ESPACIO.
LIBRO I. *Línea recta y ángulos.*	LIBRO I. *Planos, ángulos diedros y ángulos poliedros.*
LIBRO II. *Polígonos.*	LIBRO II. *Poliedros.*
LIBRO III. *Círculo.*	LIBRO III. *Los tres cuerpos redondos.*
LIBRO IV. *Polígonos semejantes.*	LIBRO IV. *Poliedros semejantes.*
LIBRO V. *Areas de los polígonos y del círculo.*	LIBRO V. *Areas y volúmenes de los poliedros y cuerpos redondos.*

Figura 5-134. Tabla de la división de la Geometría en el *Tratado de Geometría elemental* (Cortázar, 1847, p. 4)

La nota I, sobre la resolución de los problemas geométricos, que se incluye al finalizar el tratado, expone una clasificación de los diferentes tipos de problemas geométricos y diferentes estrategias de resolución, así como el método más adecuado a cada caso (SPM).

Según la clasificación que hace Cortázar,

> existen tres clases de problemas: 1.º problemas gráficos, es decir, problemas en que hay que ejecutar alguna construcción por medio de la regla y el compás (...); 2.º problemas numéricos, es decir, problemas en que se quiere hallar la ecuacion que liga á varias cantidades geométricas, ó lo que es igual, la relacion que hay entre dichas cantidades (...); 3.º problemas particulares numéricos, esto es, casos particulares de los problemas generales. (p. 227)

Asimismo, detalla los métodos que pueden seguirse para resolver cada uno de los problemas anteriores (SPM):

- Para resolver los problemas gráficos y generales numéricos puede seguirse:
    - El método analítico, que “consiste en suponer que el problema está resuelto, haciendo un croquis á la construccion que se pide, y en llegar por medio de este croquis á la construccion desconocida” (p. 227).
    - El método sintético, que “consiste en ejecutar desde luego la construccion, y en demostrar despues que dicha construccion satisface el problema” (p. 227).
- Para resolver los problemas particulares numéricos, “se despeja la incógnita en la ecuación del problema general en que está comprendido el problema particular (...), y en seguida se ejecutan las operaciones numéricas indicadas por el valor de la incógnita” (pp. 228-229).

Por otro lado, Cortázar apuesta por el uso de materiales manipulativos como la regla y el compás, para la construcción de la solución de los problemas gráficos. Lo anterior unido a la incorporación, en la última parte del tratado, de láminas con figuras que representan las explicaciones y demostraciones de los teoremas, así como la resolución de los ejemplos y problemas resueltos, muestra el interés de Cortázar por el apoyo visual como estrategia didáctica en el estudio de la Geometría (MM y RG) (Figura 5-135).

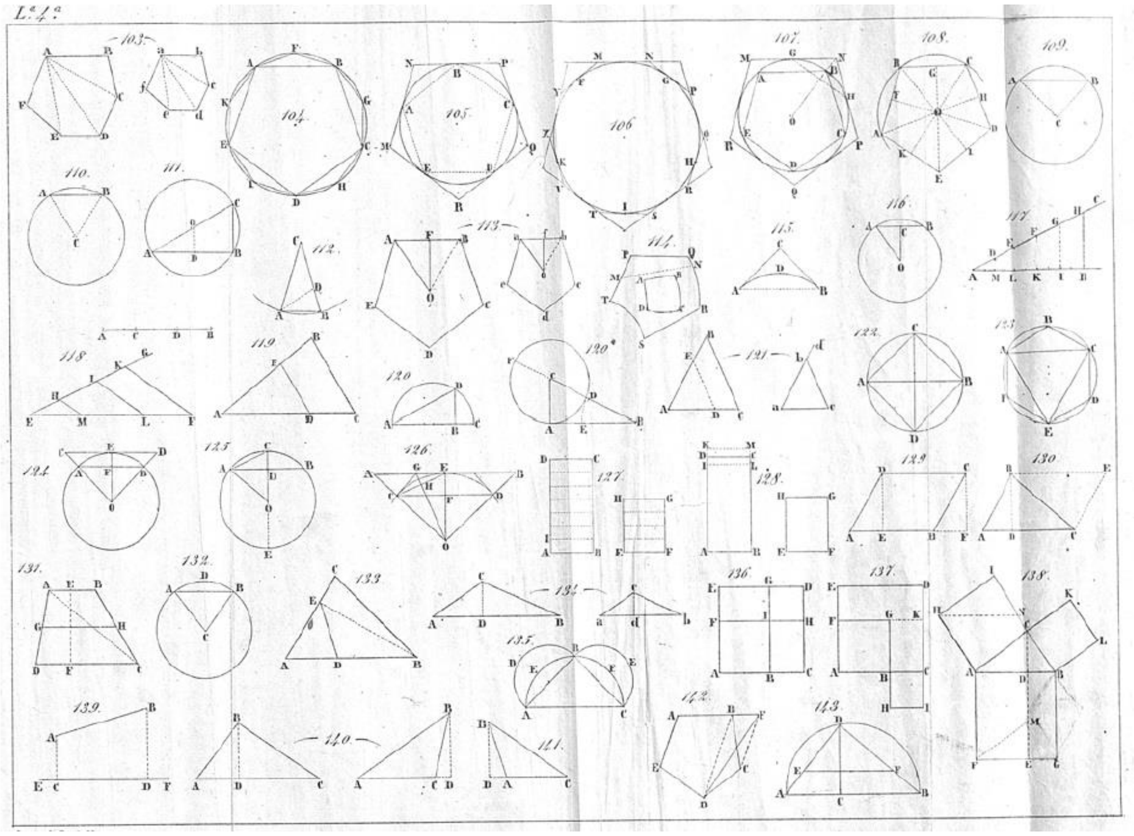
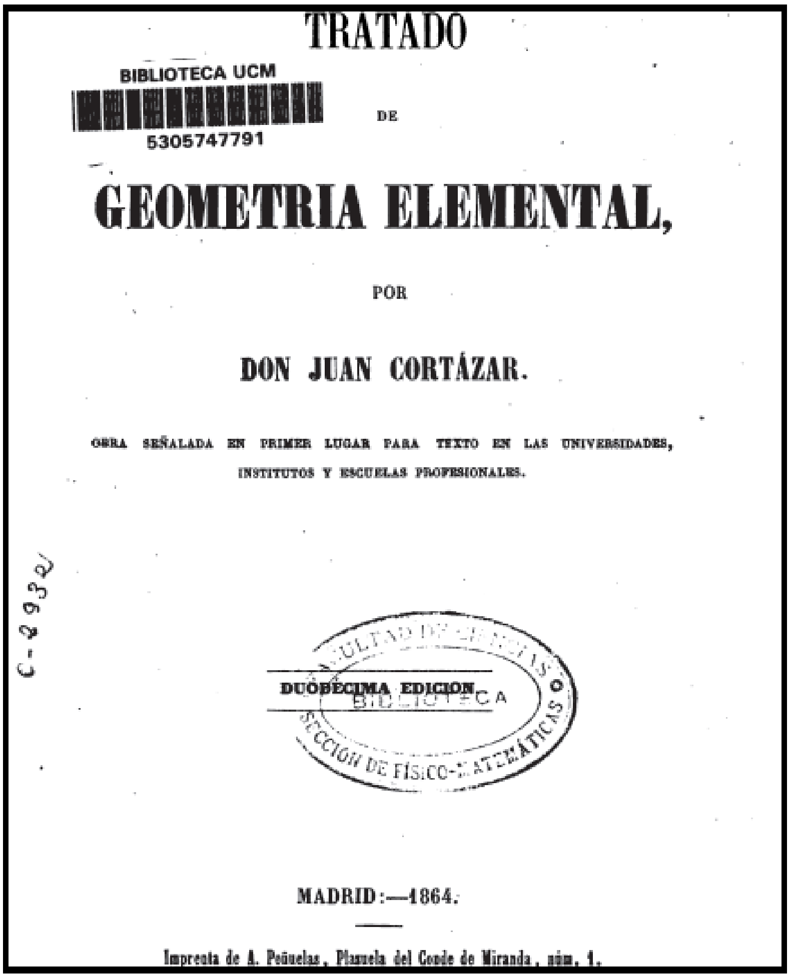


Figura 5-135. Lámina con representaciones gráficas en el *Tratado de Geometría elemental* (Cortázar, 1847)

5.5.2.2. Periodo 3 (1857-1873): Doceava edición

La doceava edición del tratado fue publicada en Madrid en 1864, por la imprenta y fundición de A. Peñuelas (CE2 y CE3). Se puede localizar un ejemplar de esta edición en la Biblioteca de la Universidad Complutense de Madrid, no obstante, puede descargarse del repositorio digital Google Books (CE4). En su portada ya reza el texto: "Obra señalada en primer lugar para texto en las Universidades, Institutos y Escuelas Profesionales" (CE6).



TRATADO

DE

GEOMETRIA ELEMENTAL,

POR

DON JUAN CORTÁZAR.

OBRA SEÑALADA EN PRIMER LUGAR PARA TEXTO EN LAS UNIVERSIDADES, INSTITUTOS Y ESCUELAS PROFESIONALES.

DUODÉCIMA EDICION

MADRID:—1864.

Imprenta de A. Peñuelas, Plazuela del Conde de Miranda, núm. 1.

Figura 5-136. Portada del *Tratado de Geometría elemental* (Cortázar, 1864)

La obra posee 200 páginas y mantiene la misma estructura que la primera edición, dividida en dos partes, geometría plana y geometría del espacia, con cinco capítulos cada una. Además de las dos notas finales que incluye la primera edición, adiciona otras dos, la primera titulada *Estudio elemental de las curvas cónicas* y la segunda *Simetría en el espacio*. Al igual que en la primera edición, se incluyen al final 8 láminas con representaciones gráficas, pero en esta edición el número de figuras disminuye a 220.

Estructura conceptual

En esta edición de la obra, se introducen mejoras con respecto a algunas definiciones, ejercicios y problemas, aunque en general tanto la secuenciación como los contenidos no sufren cambios significativos.

En particular se amplían y detallan en profundidad definiciones como las de polígono convexo; si en la primera edición se define polígono convexo como aquel “cuyo perímetro no puede ser cortado por una recta mas que en dos puntos” (p. 14), en la duodécima se amplía su definición, y aporta su representación gráfica (Figura 5-137), tanto del polígono convexo como del polígono no convexo. Así se indica que el polígono convexo es un polígono

> cuyos ángulos tienen todos la abertura hácia el interior del mismo: tal es el polígono ABCDE (fig. 19, sin AC.
>
> El polígono no es convexo, si su contorno puede ser cortado por una recta en mas de dos puntos; ó bien, si alguno de sus ángulos tiene la abertura hácia la parte exterior del mismo: tal es el polígono ABCDEF (fig. 20). (p. 11)

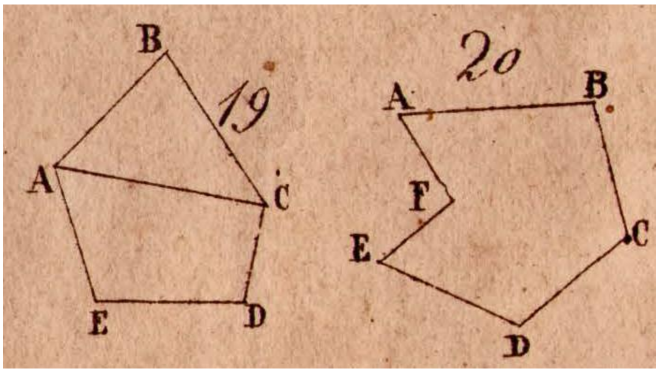
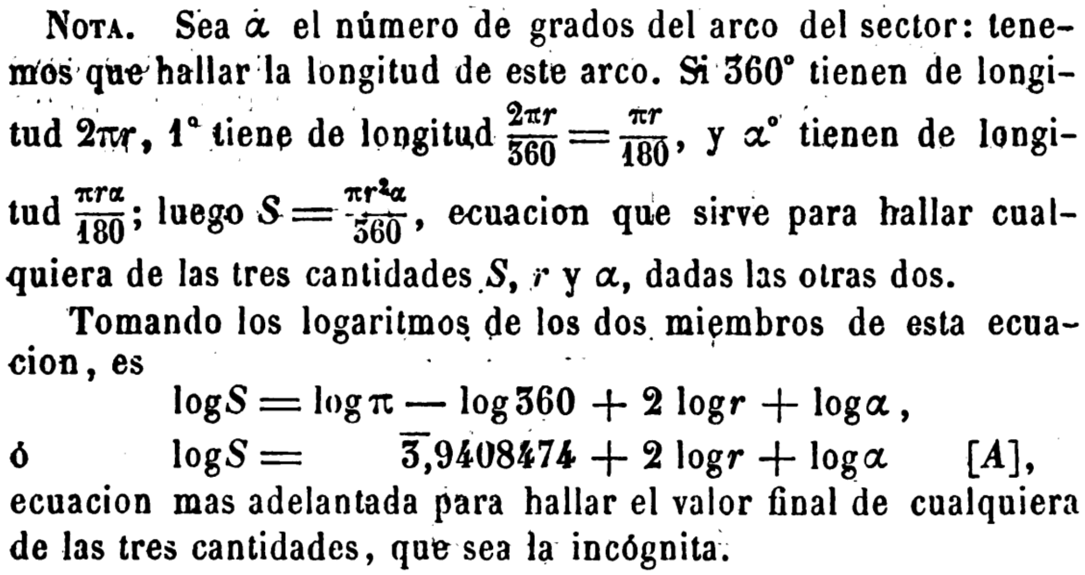


Figura 5-137. Representación de polígono convexo y no convexo en el *Tratado de Geometría elemental* (Cortázar, 1864, lámina 1ª)

Otra de las mejoras de esta edición es la introducción al capítulo sobre semejanza en figuras planas, en el que se recuerdan las definiciones de cantidades proporcionales, razón, razón inversa y proporción, las cuales son necesarias para el desarrollo del capítulo.

El número de ejercicios y problemas, en general, es mayor a los de la primera edición. Se añade asimismo el método para calcular el área de un sector de círculo (Figura 5-138), así como los siguientes tipos de ejercicios resueltos:

- Hallar el área de un sector conociendo la medida del arco y el radio de la circunferencia (p. 81).
- Hallar el radio del círculo conociendo el área del sector y la medida del arco (p. 81).
- Hallar la medida del arco conociendo el radio y el área del círculo (p. 82).



NOTA. Sea α el número de grados del arco del sector: tenemos que hallar la longitud de este arco. Si 360° tienen de longitud $2\pi r$, 1° tiene de longitud $\frac{2\pi r}{360}=\frac{\pi r}{180}$, y $\alpha°$ tienen de longitud $\frac{\pi r\alpha}{180}$; luego $S=\frac{\pi r^2\alpha}{360}$, ecuacion que sirve para hallar cualquiera de las tres cantidades S, r y α, dadas las otras dos.

Tomando los logaritmos de los dos miembros de esta ecuacion, es

$$\log S = \log\pi - \log 360 + 2\log r + \log\alpha\,,$$

ó

$$\log S = \bar{3},9408474 + 2\log r + \log\alpha \qquad [A],$$

ecuacion mas adelantada para hallar el valor final de cualquiera de las tres cantidades, que sea la incógnita.

Figura 5-138. Método para calcular el área de un sector de círculo en el *Tratado de Geometría elemental* (Cortázar, 1864, p. 81)

Sistemas de representación

La edición no presenta cambios con respecto a los sistemas de representación.

Fenomenología

Aunque esta edición incluye un mayor número de ejercicios y problemas, no presenta cambios con respecto a la fenomenología usada.

Estrategias didácticas

A pesar de que la regla, la escuadra, el compás y el transportador se señalan como instrumentos necesarios para la resolución de ejercicios y problemas en la primera edición, en esta no se incluye ni sus definiciones ni sus usos. Por el contrario, en la duodécima, se definen los instrumentos de medida (MM):

- La regla “es un instrumento por medio del cual se trazan las líneas en el papel” (p. 36).
- La escuadra “es un triángulo rectángulo ABC (fig. 72) generalmente de madera, que sirve para tirar perpendiculares y paralelas en el papel” (p. 36) (Figura 5-139).

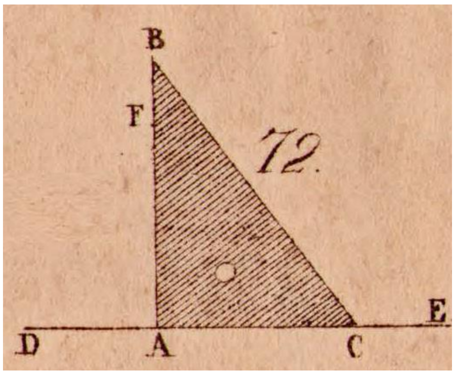


Figura 5-139. Representación de escuadra en el *Tratado de Geometría elemental* (Cortázar, 1864, lámina 2ª)

- El transportador "es un semicírculo de metal ó talco, dividido en grados; y sirve para construir en el papel un ángulo de un cierto número de grados, y al contrario para hallar el número de grados que tiene un ángulo dado en el papel" (p. 37) (Figura 5-140).

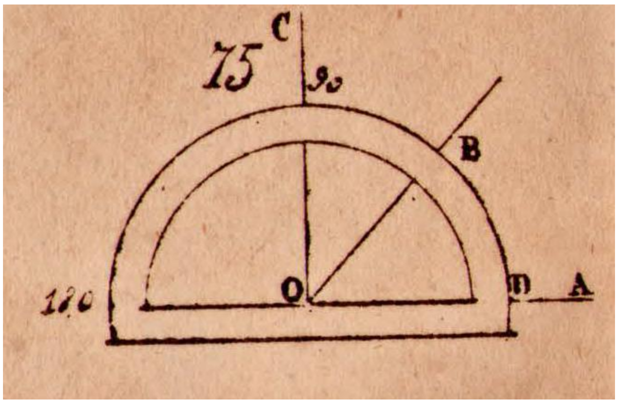


Figura 5-140. Representación de transportador en el *Tratado de Geometría elemental* (Cortázar, 1864, lámina 2ª)

Conclusiones

Además del elevado número de reediciones, el *Tratado de Geometría elemental*, ha recibido menciones internacionales por su calidad y utilidad. Lo anterior unido al hecho de que fue publicada en ciudades como Nueva York y parís, muestra su gran difusión y alcance.

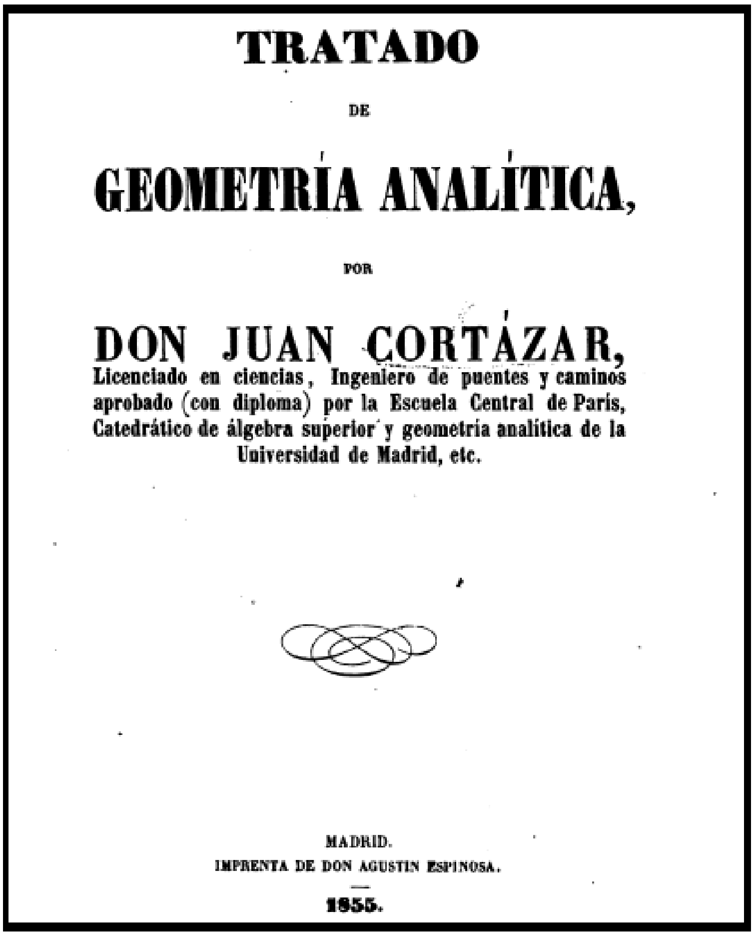
Junto a los dos tratados superiores (*Álgebra superior* y *Geometría analítica*) constituye la parte más teórica de la obra de Cortázar. Por ello, el análisis de las situaciones y contextos usados en ejercicios y problemas son de tipo estrictamente matemático, en particular, de tipo geométrico.

Con respecto a las representaciones usadas habitualmente, encontramos el lenguaje verbal, numéricas y las representaciones algebraicas, pero también se apuesta por las representaciones gráficas como un importante apoyo visual para la resolución de problemas y demostraciones de los teoremas.

5.6. Obra: *Tratado de Geometría analítica*

5.6.1. Caracterización de la obra

El *Tratado de Geometría analítica* (CO1) salió a la luz con su primera edición en 1855 y, la última y quinta edición, se publicó entre los años 1883 y 1892 (CO2, CO3 y CO4). A partir de la segunda edición, la de 1862, se anuncia en la portada que la obra estaba señalada como libro de texto en las Universidades y Escuelas Superiores. Al igual que el *Tratado de Álgebra superior*, estaba destinada a los alumnos que cursaban la asignatura Álgebra Superior y Geometría Analítica de la cátedra de Cortázar en la Universidad Central. Apareció periódicamente en las listas oficiales de libros desde 1858 hasta 1868 (Vea y Velamazán, 2011) (CO5).


TRATADO

DE

GEOMETRÍA ANALÍTICA,

POR

DON JUAN CORTÁZAR,

Licenciado en ciencias, Ingeniero de puentes y caminos aprobado (con diploma) por la Escuela Central de París, Catedrático de álgebra superior y geometría analítica de la Universidad de Madrid, etc.

MADRID.

IMPRENTA DE DON AGUSTIN ESPINOSA.

1855.

*Figura 5-141.*Portada del *Tratado de Geometría analítica* (Cortázar, 1855)

En el análisis que realiza Irueste (1912) a las últimas ediciones de las obras, destaca el desarrollo formal de los problemas generales de geometría plana y los del espacio hasta las superficies de segundo orden, aunque se deje constancia en el prólogo que Cortázar no aplicara métodos diferenciales e integrales a la resolución de ejercicios porque no los comprendía. Para Irueste (1912), "La analítica es, quizá, la mejor de todas, dentro del cuadro de la Ciencia de entonces, y sobre todo, de las necesidades de la Facultad, para cuyas tres Secciones eran obligatorios los dos primeros años de Matemáticas superiores" (p. 287). El análisis de García (1984) arroja resultados similares; señala que el estudio es bastante completo, a pesar de no incluir el cálculo de determinantes (CO6).

5.6.2. Caracterización de las ediciones

5.6.2.1. Periodo 2 (1845-1857): Primera edición

La edición más antigua de la obra a la que se tiene acceso es la primera, impresa en Madrid en 1855 por la Imprenta de Agustín Espinosa. Este ejemplar está digitalizado por el repositorio Google Books y forma o ha formado parte del British Museum (CE2, CE3 y CE4).

La obra tiene 464 páginas y, está dividida en dos partes, la primera tiene dos libros dedicados a la geometría plana y la segunda, otros dos libros dedicados a la geometría en el espacio. Los libros están divididos en capítulos, 37 en total y, además incluye al final del tratado, 10 láminas con representaciones gráficas que sirven de apoyo a las demostraciones y resolución de los problemas y, dos notas dedicadas al Teorema de Taylor extendido a las funciones algebraicas de dos y tres variables y a la construcción de las raíces de las ecuaciones de tercero y cuarto grado con una incógnita o resolución geométrica de estas ecuaciones. La Tabla 5-6 muestra la secuenciación de contenidos incluida en el índice de la obra (CE5).

Tabla 5-6. *Índice del Tratado de Geometría analítica de Juan Cortázar, 1855*

Introducción al estudio de la Geometría analítica Nociones preliminares – Homogeneidad – Construcciones geométricas – Resolución de problemas de geometría elemental	Págs. 1-52
GEOMETRÍA ANALÍTICA PLANA	
LIBRO 1º - Ecuaciones de las líneas.	Págs. 53-110

Determinación de un punto de un plano – Representación geométrica de las ecuaciones, y algébrica de líneas – Transformación de las coordenadas – Clasificación de las líneas – Líneas de primer orden	
LIBRO 2º - Líneas de segundo orden.	
Método general de tangentes a las curvas planas algébricas – Asíntotas de las curvas – Centro y diámetros de las líneas de segundo grado – Discusión de la ecuación general de segundo grado $Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$ - Reducción de la ecuacion de segundo grado a formas sencilla – Teoría de la elipse – Teoría de la hipérbola – Teoría de la parábola – Coordenadas polares – Secciones cónicas y cilíndricas – Cuadratura de las curvas de segundo grado – Semejanza de las curvas planas – Número de condiciones necesario para la determinación algébrica de una curva de segundo grado	Págs. 111-330
GEOMETRÍA ANALÍTICA DEL ESPACIO	
LIBRO 1º - Ecuaciones de las superficies y líneas.	
Determinación de un punto del espacio – Representación geométrica de las ecuaciones, y algébrica de las superficies y líneas del espacio – Problemas sobre la línea recta – Ecuaciones de las superficies – Problemas sobre el plano – Transformación de las coordenadas en el espacio	Págs. 331-384
LIBRO 2º - Superficies de segundo grado.	
Clasificación de las superficies – Planos tangentes a las superficies curvas algébricas – Centro y planos diametrales de las superficies de segundo grado – Reducción de la ecuación general de las superficies de segundo orden a sus formas más simples, siendo los ejes rectangulares, teoría del elipsoide, Teoría del hiperboloide de una hoja – Teoría del hiperboloide de dos hojas – Teoría del paraboloide elíptico – Teoría del paraboloide hiperbólico – Discusión de las ecuaciones numéricas de segundo grado con tres variables.	Págs. 385- 457

Entre las referencias a otros autores en el texto, cita a Tolomeo y su teorema sobre las diagonales de un cuadrilátero inscrito en una circunferencia y a Euler y sus ecuaciones para transformar las ecuaciones de las superficies de un sistema de ejes rectangulares a otro. También se citan las fórmulas de Descartes desarrolladas en el *Tratado de Álgebra elemental*, como aplicación algebraica a los signos de las raíces de las ecuaciones, pero no en relación con contenidos específicos de la obra. Sin embargo, hallamos referencias continuas a sus tratados de *Álgebra elemental*, *Álgebra superior*, *Geometría elemental* y *Trigonometría y Topografía* (CE7).

El prólogo de la primera edición expone el objeto de estudio de la Geometría analítica en comparación con los que incluye la obra (Tabla 5-7) (CE8).

Tabla 5-7.*Comparación del objeto de la Geometría analítica y de los contenidos del Tratado de Geometría analítica de Juan Cortázar, 1855.*

Objeto de la Geometría analítica	Objeto de la obra
Geometría plana	**Geometría plana**
1. Tangentes	1. Tangentes a las curvas algébricas
2. Asíntotas	2. Asíntotas a las curvas algébricas y trascendentes
3. Centros y diámetros	3. Centros y diámetros para curvas de segundo grado
4. Semejanza	4. Semejanza para curvas de segundo grado
5. Número de condiciones necesario para determinar algébricamente las líneas	5. Número de condiciones necesario para determinar algébricamente las líneas para curvas de segundo grado
6. Curvatura	
7. Cuadratura	
8. Rectificación	
Geometría del espacio	**Geometría del espacio**
1. Planos tangentes	1. Planos tangentes para superficies de segundo orden
2. Centro y planos diametrales	2. Centro y planos diametrales para superficies de segundo orden
3. Semejanza de las superficies	
4. Número de condiciones necesario para determinar algébricamente las superficies	

5. Curvatura

6. Curvatura de las superficies

7. Curvatura de los espacios limitados

Por otro lado, el prólogo de esta edición incluye un listado de ejercicios y problemas que pueden omitirse en un curso de Geometría analítica de poca extensión (CE8). Se trata, además, de una de las ediciones que está dedicada y firmada al autor Fausto de la Vega (Figura 5-142).

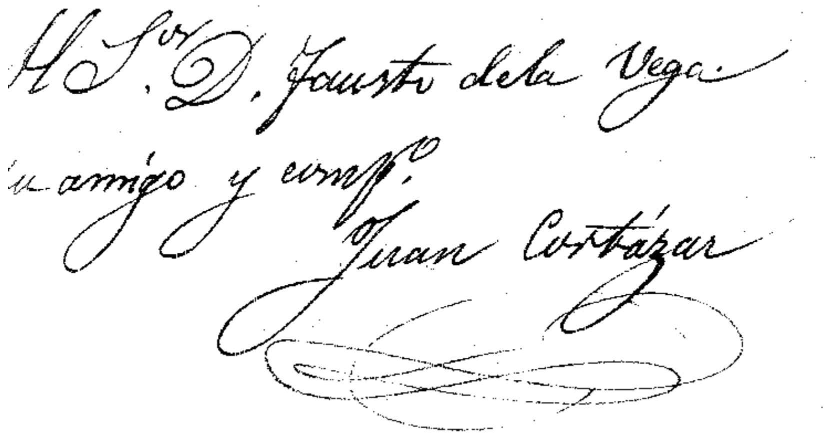


Figura 5-142. Dedicatoria en el *Tratado de Geometría analítica* (Cortázar, 1855)

Estructura conceptual

El tratado comienza con una introducción previa al estudio de la Geometría analítica. En este se define aplicación del Álgebra a la Geometría elemental o el estudio de la Geometría analítica como, “la ciencia que trata de la resolución de las cuestiones de la geometría elemental por medio del cálculo algébrico ordinario” (p. 1) (CCGA1). Esto le lleva a definir la representación algebraica de líneas, superficies y espacios como el producto de los valores numéricos de sus dimensiones y así, poder resolver ejercicios y problemas algebraicamente.

El siguiente capítulo está dedicado a la construcción geométrica de las expresiones enteras, fraccionarias, radicales cuyo índice es 2^n, siendo n un entero positivo, de casos particulares como $x = \sqrt{a^2 + b^2}$, las raíces de ecuaciones completas de segundo grado y bicuadradas o de expresiones algebraicas de segundo y tercer grado.

El último capítulo incluye una relación de problemas gráficos y de problemas numéricos, que deben resolverse mediante el cálculo algébrico.

La parte fundamental del tratado comienza con el estudio de la geometría analítica plana, desglosada en el estudio de las ecuaciones de las líneas y el estudio de las líneas de segundo orden. Antes de ello, debe sentar las bases que le permitan determinar un punto cualquiera en un plano. Para ello, define ejes de coordenadas, eje de abscisas, eje de ordenadas y origen de coordenadas. Así, “la posicion de un punto de un plano quedará determinada, con respecto á dos ejes que se hallen en dicho plano, conociendo su abscisa y su ordenada” (p. 54). El estudio de los ejes de coordenadas se realiza en los casos en los que los ejes son perpendiculares entre sí [ejes rectangulares] y, también, en el caso en el que no lo sean [ejes oblicuángulos].

Previo al estudio de las ecuaciones de las líneas, se define lugar geométrico de una ecuación de dos variables como la línea plana correspondiente a la construcción de sus diferentes soluciones. Así, “la ecuacion de una línea es la ecuacion que indica la relacion constante que hay entre las coordenadas de un punto cualquiera de dicha linea” (p. 57). Por tanto, la Geometría analítica plana “es la ciencia que se ocupa del estudio de las líneas planas por métodos generales, representándolas antes por medio de ecuaciones” (p. 57) (CCGA2).

A continuación, se explica de forma general el método para hallar los puntos de intersección de dos líneas y los puntos de corte con los ejes de abscisas y ordenadas. Seguidamente se desarrolla el estudio de las ecuaciones de las líneas. En primer lugar, se estudian las ecuaciones de las líneas rectas por medio de los datos suficientes para determinar su posición. Así (CCGA2) (Figura 5-143),

> Consideremos, pues, á la recta AN en el caso mas general, que es aquel en que la recta no es paralela á ninguno de los ejes, y tampoco pasa por el origen; y supongamos que se conozcan la ordenada en el orígen, es decir, la ordenada del punto B, en que la recta corta al eje de ordenadas, y el ángulo NAX superior de la derecha que la recta forma con el eje Ox; datos que evidentemente determinan la posicion de la recta. Para hallar la ecuacion de la recta, señalemos las coordenadas OP=x, MP=y de un punto M de la recta, punto cuyas coordenadas sean positivas: llamemos Θ al ángulo YOX superior de la derecha que forman los ejes, α al ángulo NAx, y b á la ordenada del punto B, la cual podrá ser positiva

> ó negativa, según la posición de este punto. Tiremos ahora la recta BQ paralela al eje Ox, y tendremos en el triángulo MBQ la proporcion
>
> $$\frac{MQ}{BQ} = \frac{sen\, MBQ}{sen\, BMQ},$$
>
> ó, puesto que el ángulo $BMQ = MPx - MAx = \theta - \alpha$,
>
> será
>
> $$\frac{y-b}{x} = \frac{sen\,(\alpha)}{sen\,(\theta-\alpha)},$$
>
> de donde $y = \frac{sen\,\alpha}{sen\,(\theta-\alpha)}x + b$. (pp. 58-59)

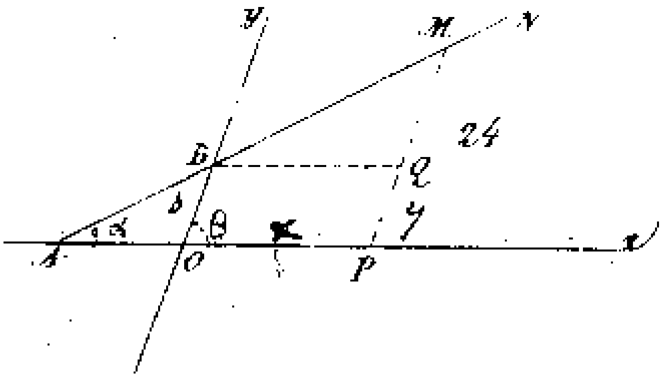


Figura 5-143. Construcción de la recta en el *Tratado de Geometría analítica* (Cortázar, 1855, lámina II)

Enseguida estudia y desarrolla la ecuación de la línea recta en los casos particulares:

- la recta pasa por el origen,
- la recta es paralela al eje de abscisas,
- la recta coincide con el eje de abscisas,
- la recta es paralela al eje de ordenadas y,
- los ejes de coordenadas son rectangulares, por tanto, ϴ=90º y $\frac{sen\,\alpha}{sen\,(\theta-\alpha)} = tg\alpha.$

Posteriormente se estudia la ecuación del círculo comenzando en el caso particular en el que el origen de coordenadas es el centro del círculo y los ejes de coordenadas son rectangulares, para después generalizar el resultado a un punto cualquiera. Así (CCGA2) (Figura 5-144),

> La posicion y magnitud del círculo quedarán determinadas, conociendo las coordenadas OA=a, CA=b del centro y el radio R. Sea M un punto cualquiera del círculo, y sus

> coordenadas OP=x, MP=y: tiremos el radio CM y la CQ paralela al eje Ox. El triángulo rectángulo CMQ nos da la ecuacion
>
> $CQ^2 + MQ^2 = CM^2,$
>
> ó
>
> $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2;$
>
> ecuacion del círculo en cualquiera de sus posiciones con respecto á los ejes Ox, Oy, y que por tanto se llama la ecuacion general del círculo, siendo los ejes rectangulares. (p. 64)

Por último, estudia el caso en el que los ejes de coordenadas son oblicuángulos.

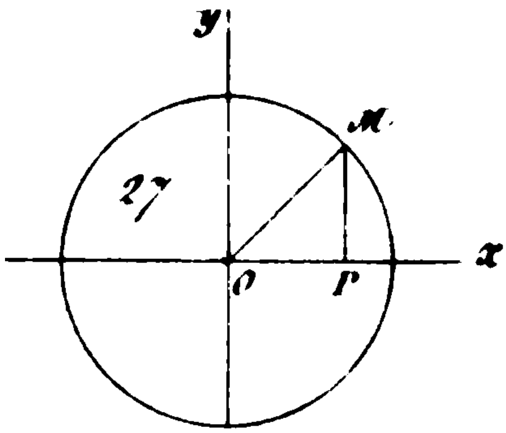


Figura 5-144. Construcción de la circunferencia en el *Tratado de Geometría analítica* (Cortázar, 1855, lámina II)

En el siguiente apartado se define la elipse como la “curva en la que se verifica que la suma de las dos distancias de cada uno de sus puntos á dos puntos dados es una cantidad constante” (p. 71) (CCGA2). Por lo tanto (CCGA2) (Figura 5-145),

> Sean OP=x y MP=y las coordenadas de un punto cualquiera M de la curva; llamemos 2c á la distancia FF’ entre los dos puntos dados, z y z’ á las distancias variables MF y MF’ del punto M á los dos puntos dados F y F’, y 2a á la cantidad constante á que es igual la suma z+z’.
>
> La definición de la elipse nos da la ecuacion
>
> $$z + z' = 2a \ldots [1]$$
>
> Para deducir de esta ecuacion la de la curva, espresaremos las variables z y z’ en funcion de las coordenadas variables x é y. Tenemos evidentemente
>
> $$z = \sqrt{y^2 + (x-c)^2}$$

$$z' = \sqrt{y^2 + (x+c)^2}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuacion [1],

[...]

la ecuacion de la elipse será $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$. (pp. 71-72)

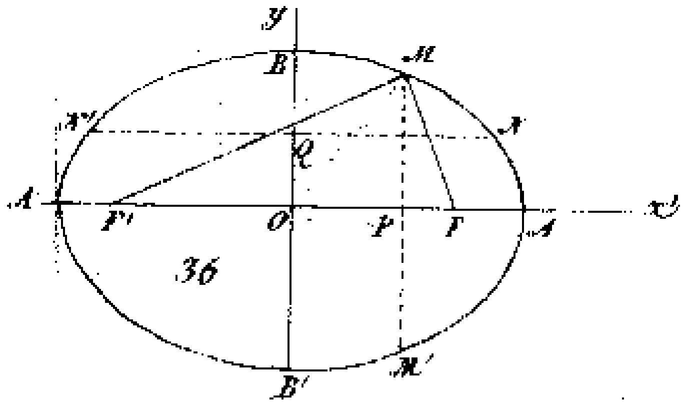


Figura 5-145. Construcción de la elipse en el *Tratado de Geometría analítica* (Cortázar, 1855, lámina II)

Análogamente, se define la hipérbola como "una curva en la que la diferencia de las distancias de cada uno de sus puntos á dos puntos dados es constante" (p. 73) (CCGA2). Y por tanto (CCGA2) (Figura 5-146),

> Sean OP=x y MP=y las coordenadas de un punto cualquiera M de la curva; llamemos 2c á la distancia FF' entre los dos puntos dados, 2a á la cantidad constante á que es igual la diferencia de las distancias MF=z y MF'=z'.
>
> La definicion de la hipérbola nos da la ecuacion
>
> $$z - z' = 2a \ldots [A]$$
>
> Para deducir de esta ecuacion la ecuacion de la curva, espresaremos las variables z' y z en funcion de las coordenadas variables x é y.
>
> Tenemos evidentemente
>
> $$z = \sqrt{y^2 + (x+c)^2}$$
>
> $$z' = \sqrt{y^2 + (x-c)^2}$$
>
> Sustituyendo estos valores en la ecuacion [A],
>
> [...]

la ecuacion de la hipérbola será $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$. (p. 74)

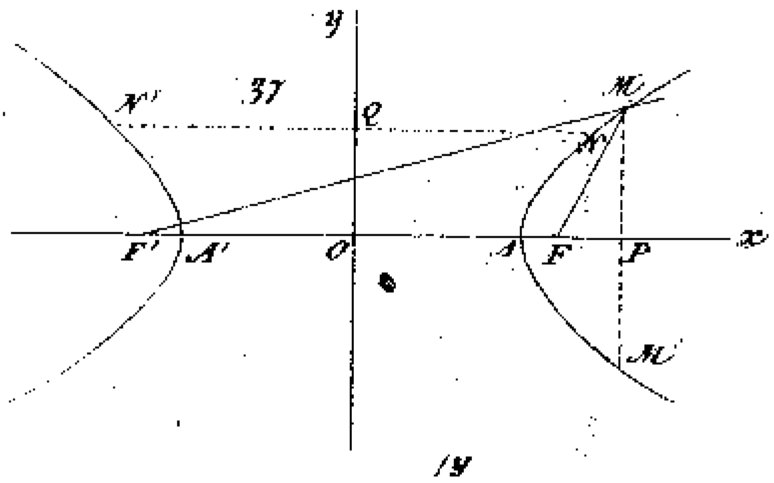


Figura 5-146. Construcción de la hipérbola en el *Tratado de Geometría analítica* (Cortázar, 1855, lámina II)

Por último, se define parábola como "la curva en la que se verifica que la distancia de uno cualquiera de sus puntos á un punto dado es igual á la distancia del mismo punto á una recta dada" (p. 75) (CCGA2). Así (CCGA2) (Figura 5-147),

> Para hallar por medio de esta definición, la ecuacion de la parábola, tomaremos por eje de abscisas la recta [...] que pasa por el punto dado F y es perpendicular a la recta dad DR, y por eje de ordenadas la perpendicular Oy á la recta DFx en el punto medio O de la distancia FD.
>
> Sea M uno de los puntos de la curva cuyas coordenadas OP=x, MP=y, y llamemos p á la distancia FD. Segun la definicion de la curva tendremos la ecuacion
>
> $$MF = MR$$
>
> Para deducir de esta ecuacion de la curva, espresaremos las dos cantidades variables MF y MR en funcion de las coordenadas variables x é y.
>
> Es evidente que $MF = \sqrt{y^2 + (x - \frac{p}{2})^2}$,
>
> [...]
>
> luego la ecuacion de la parábola será
>
> [...]
>
> $y^2 = 2px$. (pp. 75-76)

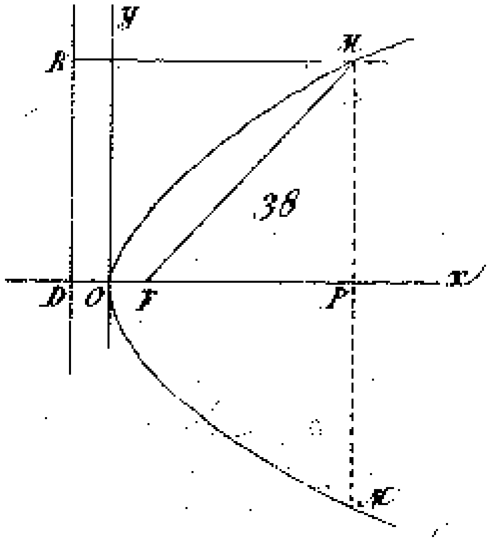


Figura 5-147. Construcción de la parábola en el *Tratado de Geometría analítica* (Cortázar, 1855, lámina II)

Para poder hallar la ecuación de una línea respecto a otro sistema de ejes diferentes, el siguiente capítulo expone la transformación del sistema de coordenadas distinguiendo entre los casos: cambio del origen de coordenadas, siendo los nuevos ejes paralelos a los originales, cambio de la dirección de los ejes de coordenadas, sin variar el origen y cambios del eje y origen de coordenadas. Al final del capítulo, se aporta un ejemplo concreto en el que se debe hallar la ecuación de una circunferencia respecto a los ejes rectangulares, dada su ecuación con respecto a los ejes oblicuángulos.

En los siguientes capítulos se expone la clasificación de las líneas planas, en particular las líneas planas algebraicas, cuya ecuación general es $f(x, y) = Ay^m + (Bx + C)y^{m-1} + (Dx^2 + Ex + F)y^{m-2} + \cdots + (ax^m + bx^{m-1} + \cdots + k) = 0$. Por otro lado, se realiza el estudio de las de primer orden, que corresponden a las líneas rectas; se resuelve una relación de ejercicios correspondientes a las líneas rectas y se aplican sus propiedades a varias demostraciones de teoremas de geometría elemental. Los ejercicios que se aportan son de tipo (CCGA2):

- Cálculo de la ecuación de la recta conociendo las coordenadas de uno de sus puntos y su dirección.
- Cálculo de la ecuación de la recta conociendo dos de sus puntos.
- Cálculo de la ecuación de la recta perpendicular a una dada, conocido uno de sus puntos.

- Cálculo de la distancia entre dos puntos dados.
- Cálculo de la distancia entre un punto dado y una recta conocida.

En los primeros capítulos del siguiente libro, se estudian las tangentes, asíntotas, centros y diámetros de las curvas planas algebraicas. En primer lugar, se define tangente a una curva en uno de sus puntos a la "posicion que toma una secante, que pasa por este punto, cuando otro de sus puntos de interseccion con la curva coincide con el primero, en virtud del movimiento de la secante al rededor de este punto" (p. 111) (CCGA3) (Figura 5-148). A continuación, se desarrolla el cálculo de la ecuación de la tangente a una curva por un punto conocido. Así, "Siendo x' é y' las coordenadas del punto dado M. [...] la ecuación de la tangente será $y-y'=-\frac{f'_{x'}}{f'_{y'}}(x-x')$" (pp. 111-112) (CCGA3).

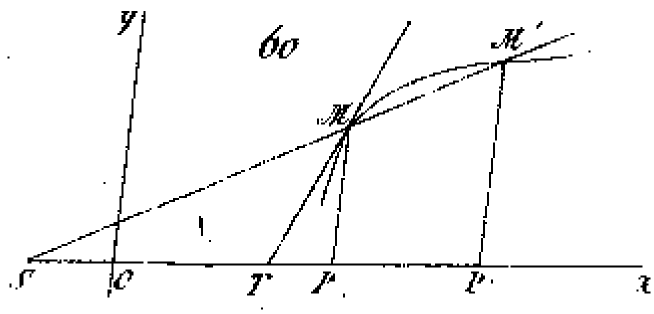


Figura 5-148. Tangente a una curva en el *Tratado de Geometría analítica* (Cortázar, 1855, lámina III)

Posteriormente se estudian dos casos particulares. El primero de ellos parte de la hipótesis de que la curva tiene la forma y=f(x); el segundo estudia las curvas de segundo grado. Por último, se aportan los enunciados y resolución de algunos problemas relativos al cálculo de las ecuaciones de las tangentes. Los objetivos de los problemas se clasifican en (CCGA3):

- Cálculo de la ecuación tangente a una curva de la que se conoce su ecuación por un punto dado que pertenece a la curva.
- Cálculo de la ecuación tangente a una curva de la que se conoce su ecuación y la posición de los ejes de coordenadas por un punto dado.
- Cálculo de la ecuación tangente a una curva de la que se conoce la dirección de la tangente.

Asimismo, se estudia el problema del cálculo de ecuaciones normales a una curva, entendiendo por normal a una curva “la perpendicular MN á la tangente MT en el punto de contacto M” (p. 121) (CCGA3) (Figura 5-149).

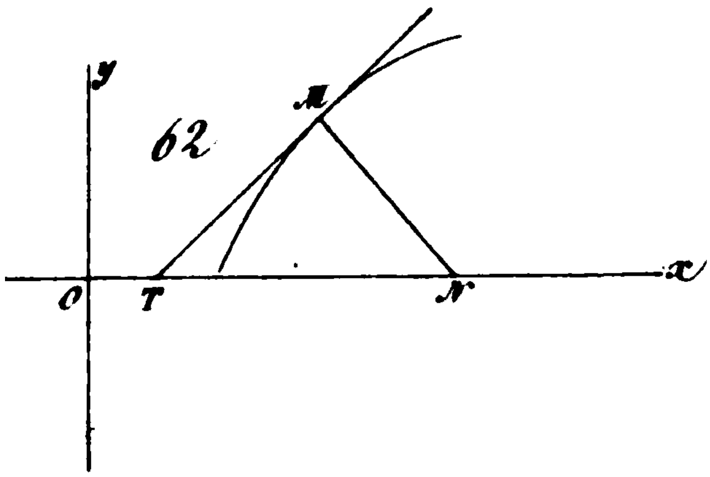


Figura 5-149. Ecuación normal en el *Tratado de Geometría analítica* (Cortázar, 1855, lámina III)

La obra continua con el estudio de las asíntotas de una curva, a las que define de la forma: “Asíntota de una curva, que tiene una ó varias ramas infinitas, es una recta que puede acercarse á la curva indefinidamente, sin llegar nunca á alcanzarla” (p. 122) (CCGA3) (Figura 5-150). En contraposición al caso de las tangentes, el estudio de las asíntotas se realiza en general, tanto para curvas algebraicas como trascendentes. Se distinguen los siguientes casos (CCGA3):

- Las asíntotas no son paralelas al eje de ordenadas, en el que las ecuaciones de las asíntotas serán $y = cx + d$, siendo c “el valor que toma $\frac{y}{x}$ cuando $x = \pm\infty$” (p. 123) y siendo d “el valor que toma $y - cx$ cuando $x = \pm\infty$” (p. 123).
- Las asíntotas paralelas al eje de ordenadas, en el que basta con calcular las asíntotas paralelas al eje de abscisas, tomando $x = cy + d$ análogamente al caso anterior.

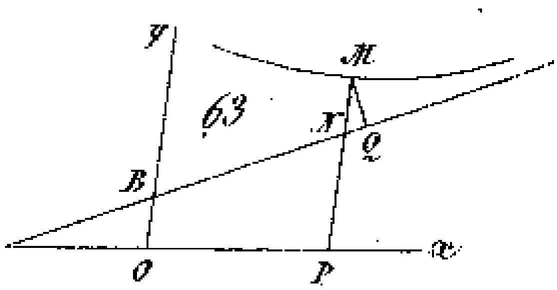


Figura 5-150. Asíntotas de las curvas en el *Tratado de Geometría analítica* (Cortázar, 1855, lámina III)

Para facilitar el cálculo de las asíntotas, se aporta un algoritmo de cálculo que reduce los cálculos y el tiempo de resolución. Por último, se aportan numerosos ejemplos que presentan las diferentes situaciones que los alumnos pueden encontrar a la hora de calcular las asíntotas de las curvas.

El siguiente capítulo está dedicado al estudio de los centros y diámetros de las curvas de segundo grado. En primer lugar, se define centro de una curva al "punto que divide en dos partes iguales á todas las cuerdas que pasan por él" (p. 133) (CCGA3) (Figura 5-151). También se calculan las coordenadas del centro de una curva general de segundo orden en los casos en los que no posean términos lineales y en los que sí.

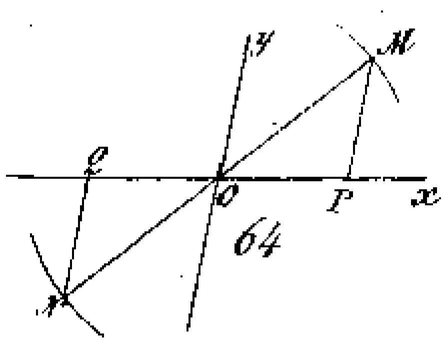


Figura 5-151. Centro de una curva en el *Tratado de Geometría analítica* (Cortázar, 1855, lámina III).

A continuación, se define diámetro de una curva a la "línea recta ó curva que pasa por los puntos medios de un sistema de cuerdas paralelas" (p. 138) (CCGA3). Análogamente se desarrolla el procedimiento general para calcular la ecuación de los diámetros de una línea de segundo grado y, en particular las ecuaciones de los ejes, entendidos como "todo diámetro perpendicular á las cuerdas que él mismo biseca” (p. 145) (CCGA3) (Figura 5-152).

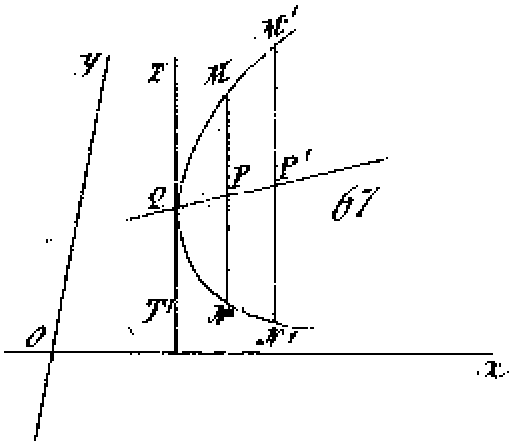


Figura 5-152. Diámetro de una curva en el *Tratado de Geometría analítica* (Cortázar, 1855, lámina III)

En el siguiente capítulo se discute la ecuación de segundo grado $Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$, es decir, se determinan “las diferentes líneas que esta ecuacion puede representar segun los valores de los coeficientes” (p. 147) y se hallan las formas que tienen dichas líneas. Esta explicación es complementada con numerosos ejemplos.

En particular, se estudian con detenimiento, a través de sus ecuaciones, las teorías de las tres curvas de segundo grado: elipse, parábola e hipérbola. Previamente, se reduce la ecuación general de cada curva a expresiones más sencillas representándolas en sistemas de ejes rectangulares y trasladando el centro de la curva al origen de coordenadas.

En las tres teorías se estudia de manera análoga:

- El valor de los coeficientes de las ecuaciones reducidas. En el caso de la elipse y la hipérbola con respecto a sus ejes y en la parábola, con respecto a su eje y vértice.
- La construcción de las curvas. En el caso de la elipse, dados sus ejes y en la parábola, dado el parámetro p (Figura 8). La construcción de la hipérbola dados sus ejes se considera complicada para ser incluida en el tratado.
- Los focos y directrices de las tres curvas.
- Las tangentes y normales de las tres curvas.

Además, se estudian las cuerdas suplementarias de la elipse y la hipérbola, los diámetros conjugados de la elipse, las asíntotas de la hipérbola y los diámetros de la parábola. Las tres teorías desarrolladas permiten la resolución de los problemas planteados en el capítulo sobre tangentes de las curvas, a través de estrategias de resolución más sencillas.

El tratado continúa con la adopción de otro sistema de referencia, el de coordenadas polares, que Cortázar considera "el mas ventajoso en la geometría analítica, despues del rectilíneo" (p. 283). El sistema se basa en "Determinar la posición de un punto con respecto á una recta dada y á un punto dado en ella" (p. 283) (CCGA4). Así (CCGA4),

> Sea OE la recta dada y O el punto dado en ella, con respecto á los cuales se quiere determinar la posición de un punto cualquiera M: tiremos la recta indefinida MOM'.
>
> La recta dada OE se llama eje polar, y el punto O dado en ella se llama polo. Todo arco, positivo ó negativo de una circunferencia cuyo centro sea O y cuy o radio sea arbitrario, que principie en el punto m del eje polar y termine en el punto n ó n' de la recta OM ó de su prolongación OM', se llama amplitud del punto M. La distancia MO del punto M al polo se llama radio vector de este punto M. (p. 283)

Definido el sistema, se desarrollan las ecuaciones polares de la línea recta, de la circunferencia, de la elipse, de la hipérbola y de la parábola, así como la correspondencia para transformar las coordenadas rectilíneas en polares y viceversa, acompañadas de varios ejemplos que pueden clasificarse en (CCGA4):

- Hallar la ecuación polar de la elipse conocida su ecuación algebraica, siendo el centro de la elipse, el polo y el eje mayor, el eje polar.
- Hallar la ecuación polar de la línea recta conocida su ecuación algebraica.
- Hallar la ecuación algebraica de la circunferencia, conocida su ecuación polar.
- Hallar la ecuación algebraica de la parábola, conocida su ecuación polar, siendo el polo, el vértice de la parábola y siendo el eje de la parábola, el eje polar.

Posteriormente se estudian las secciones cónicas y cilíndricas, como las curvas de segundo grado que se generan mediante las secciones de las superficies cónicas y cilíndricas; la cuadratura de la elipse, hipérbola y parábola, así como las curvas semejantes a circunferencias, elipses, parábolas e hipérbolas.

El último capítulo, correspondiente a la Geometría analítica plana, estudia el número de condiciones necesarias para poder hallar la ecuación de las curvas de segundo grado. Se entiende que "una curva de segundo grado está algebraicamente determinada, cuando el número de ecuaciones distintas entre los datos y los coeficientes incógnitos a, b, c... sea igual al número de estos coeficientes que sean independientes entre sí" (p. 322). Se aportan numerosos ejemplos que complementan las explicaciones. Podemos clasificarlos en (CCGA2):

- Hallar la ecuación de la circunferencia conocidos tres puntos.
- Hallar la ecuación de la elipse conocidos cinco puntos.
- Hallar la ecuación de la parábola conocidos cuatro puntos.
- Hallar la ecuación de la hipérbola conocido el centro y tres puntos de la misma.
- Hallar la ecuación de la elipse dados el centro, uno de sus focos y la directriz correspondiente a ese foco.
- Hallar la ecuación de la hipérbola conocido el centro, una directriz y un punto de la misma.
- Hallar la ecuación de la parábola dados el eje, la directriz y un punto de la misma.
- Hallar la ecuación de la elipse, dados el centro, un foco y una tangente a la misma.

La segunda parte del tratado estudia la Geometría analítica en el espacio. Análogamente al caso de la Geometría plana, para estudiar las ecuaciones de las superficies y líneas, se fijan los criterios que permiten determinar un punto cualquiera en el espacio. Para ello, define planos coordenados y coordenadas de un punto respecto a esos tres planos. El estudio de los ejes de coordenadas también se realiza en el caso en el que los ejes son perpendiculares entre sí y en el caso en el que no lo son.

Tras analizar las formas que toman en el espacio, las ecuaciones de las líneas en el plano, se estudia la ecuación de la forma f(x, y, z)=0. Así se demuestra que "toda ecuacion con tres variables corresponde una superficie" (p. 337) y que la forma de dicha superficie se conoce, ya que "si hallamos las intersecciones de dicha superficie con varios planos paralelos á los coordenados las distancias que hay desde los planos secantes á los coordenados, y la forma de las respectivas intersecciones, manifestarán la forma de dicha superficie" (p. 338).

Posteriormente, se estudian las ecuaciones de las líneas y las superficies en el espacio. En primer lugar, se desarrolla la teoría sobre la línea recta. Así (CCGA5) (Figura 5-153),

> Una línea recta AB queda determinada en el espacio conociendo dos de sus tres proyecciones PQ, RS y TV sobre los planos coordenados.
>
> [...]
>
> Tomando por eje comun de abscisas el eje Oz, y por ejes de ordenadas el Ox en el plano xz, y el Oy en el yz, las ecuaciones de las dos proyecciones PQ y RS, ó de los planos proyectantes PQAB y RSAB, serán $x = az + \alpha$, $y = bz + \beta$, teniendo z en las dos el mismo valor. Estas dos ecuaciones determinan la recta AB del espacio; y por esta razon las llamaremos las ecuaciones de la recta. (pp. 338-339)

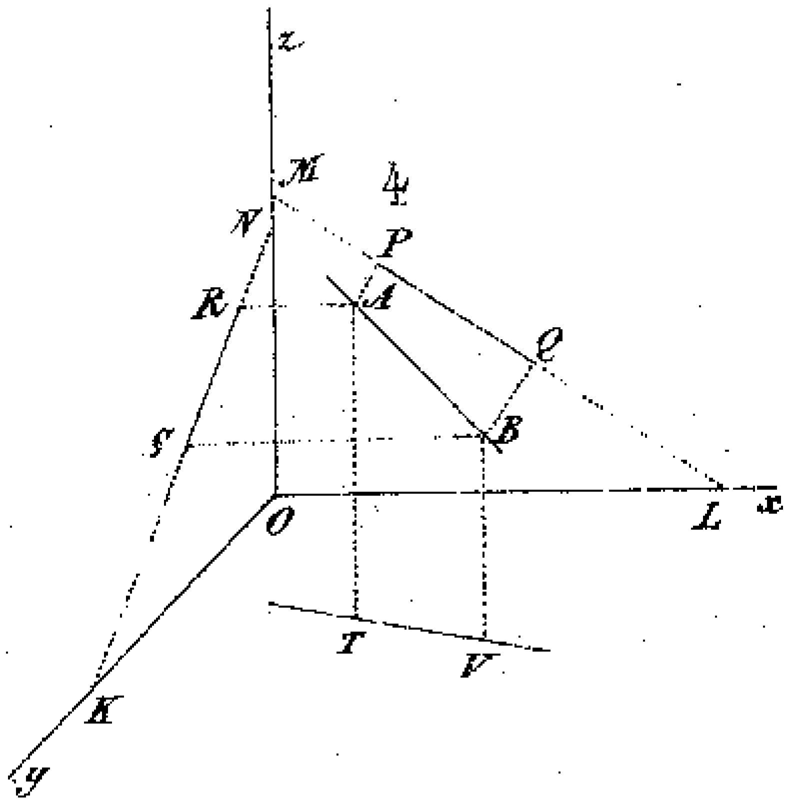


Figura 5-153. Construcción de una recta en el espacio en el *Tratado de Geometría analítica* (Cortázar, 1855, lámina 8)

Análogamente se estudian las ecuaciones de las curvas en el espacio:

> Una línea curva AB queda determinada en el espacio del mismo modo que una línea recta, esto es, por medio de dos de sus tres proyecciones PQ, RS, TU sobre los planos coordenados; pues construyendo los dos cilindros proyectantes respectivos, la interseccion de estas dos superficies será la curva pedida. (p. 340)

A continuación, se aportan las soluciones de varios problemas sobre la línea recta. Estos son del tipo (CCGA5):

- Hallar las ecuaciones de una recta, que pasa por un punto dado, conociendo los ángulos que sus dos proyecciones verticales forman con el eje Oz.
- Hallar las ecuaciones de una recta que pasa por dos puntos dados.
- Hallar las ecuaciones de una recta que pasa por un punto dado y es paralela a una recta dada.
- Hallar la relación entre los coeficientes de las ecuaciones de dos rectas para que tengan sean secantes, además de calcular el punto de intersección.
- Hallar la distancia entre dos puntos siendo los ejes rectangulares.
- Hallar el ángulo que forman dos rectas en el espacio.
- Hallar los ángulos que una recta forma con los ejes rectangulares.
- Hallar el coseno del ángulo que forman dos rectas, conocidos los cosenos de los ángulos que ambas forman con los ejes rectangulares.

Enseguida se estudian las ecuaciones de las superficies en el espacio, a las que se las considera "engendradas por el movimiento de una línea, ó de una curva de forma constante ó variable, llamada generatriz, que se apoya sobre una ó varias líneas fijas, llamadas directrices" (p. 350). En primer lugar, se estudian las superficies engendradas por una generatriz que se apoya sobre una sola directriz, en particular, el caso del plano. Así (CCGA5) (Figura 5-154),

> El plano puede considerarse engendrado por una recta que se mueve á lo largo de otra recta fija, consevándose la generatriz constantemente paralela á sí misma.
>
> [...]
>
> Llamemos, para abreviar, A, B, C á los coeficientes de las variables de esta ecuacion, y D al término independiente de dichas variables, y la ecuacion del plano será
>
> $Ax + By + Cz + D = 0$. (p. 350-351)

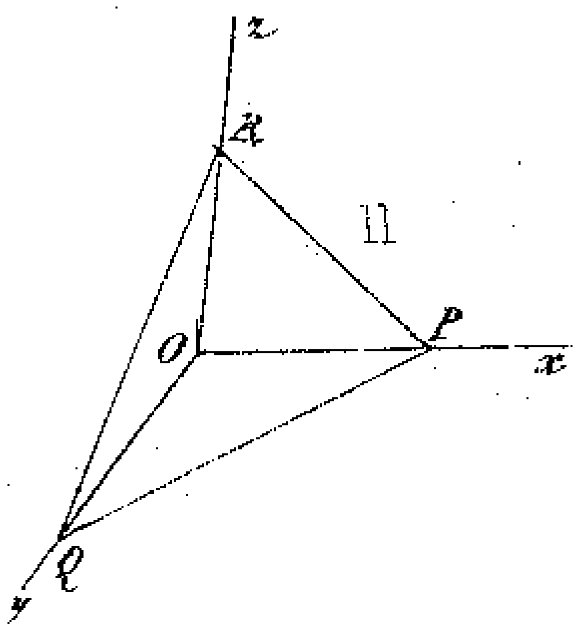


Figura 5-154. Construcción del plano en el espacio en el *Tratado de Geometría analítica* (Cortázar, 1855, lámina 8)

Como complemento a la explicación, se aporta una relación de ejercicios con solución, de los tipos (CCGA5):

- Hallar la ecuación de un plano que pasa por un punto dado y es paralelo a otro plano dado.
- Hallar la ecuación de un plano que pasa por tres puntos dados no alineados.
- Hallar la ecuación del plano que contiene a una recta dada y es paralelo a otra, no siendo esta última paralela a la primera.
- Hallar la ecuación de un plano que contiene a una recta dada y pasa por un punto dado no perteneciente a la recta.
- Hallar la ecuación de una recta que pasa por un punto dado, conociendo un plano al cual es perpendicular, en el caso en el que los ejes son rectangulares.
- Hallar la ecuación de un plano que pasa por un punto dado y es perpendicular a una recta dada, en el caso en el que los ejes son rectangulares.
- Hallar la distancia de un punto dado a un plano dado, en el caso en el que los ejes son rectangulares.
- Hallar el ángulo que forman dos planos, en el caso en el que los ejes son rectangulares.

- Hallar los ángulos que forma un plano con los planos coordenados, en el caso en el que los ejes son rectangulares.
- Hallar el ángulo que forman una recta y un plano dados, en el caso en el que los ejes son rectangulares.
- Hallar la ecuación de un plano que contiene a una recta oblicua o es paralela a otro plano, siendo el primer plano perpendicular al segundo y siendo los ejes rectangulares.

Análogamente se estudian los casos de la superficie cilíndrica y las superficies de revolución, como el cono de revolución o la esfera.

El estudio de las superficies continúa con los casos del paraboloide elíptico, paraboloide hiperbólico, elipsoide, hiperboloide de una hoja e hiperboloide de dos hojas:

- Paraboloide elíptico. Se define el paraboloide elíptico como “la superficie engendrada por una parábola DOE que se mueve paralelamente á sí misma, teniendo siempre su vértice sobre otra parábola BOC, cuyo plano es perpendicular al de la primera, y cuyas aberturas están situadas hácia una misma region” (p. 361) (CCGA5) (Figura 5-155). Por tanto (CCGA5),

> Para hallar la ecuacion del paraboloide elíptico, tomemos por plano xy de la parábola directriz AOO’, por ejes de las x el eje de esta parábola, y por orígen de las coordenadas rectangulares el vértice de la misma [...] resulta la ecuacion del paraboloide elíptico $\frac{y^2}{2p}+\frac{z^2}{2p'}=x$. (p. 361)

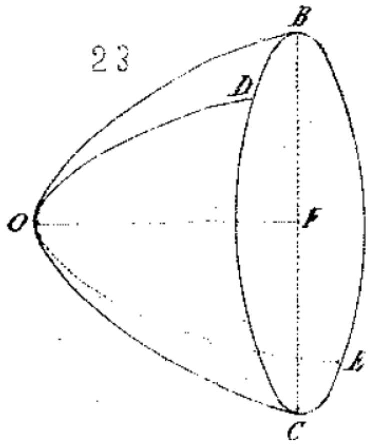


Figura 5-155. Paraboloide elíptico en el *Tratado de Geometría analítica* (Cortázar, 1855, lámina 9)

- Paraboloide hiperbólico. Se define paraboloide hiperbólico como la “superficie PO’QP’O’’Q’ engendrada por una parábola PO’Q, que se mueve paralelamente á sí misma, teniendo siempre su vértice sobre otra parábola O’OO’’ (p. 362), cuyo “plano es perpendicular al de la primera, y cuyas aberturas estan situadas hácia regiones opuestas” (p. 362) (Figura 5-156) (CCGA5). Por tanto, “Para hallar la ecuacion de este paraboloide, supondremos que la parábola OO’ se halla en el plano xy, que su eje es el de las x, y su vértice el orígen de las coordenadas rectangulares [...] resulta $\frac{y^2}{2p} - \frac{z^2}{2p'} = x$ (pp. 362-363) (CCGA5).

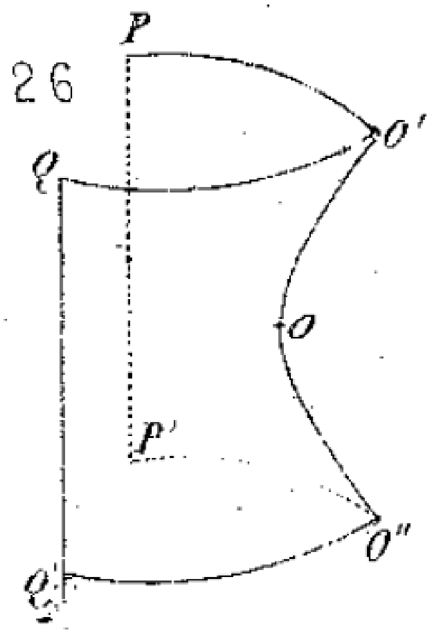


Figura 5-156. Paraboloide elíptico en el *Tratado de Geometría analítica* (Cortázar, 1855, lámina 9)

- Elipsoide. Se define elipsoide (Figura 5-157) (CCGA5) como

> la superficie ABC engendrada por una elipse BCB'C' de ejes variables, que se mueve paralelamente á sí misma, y se apoya constantemente sobre otras dos elipses fijas ABA'B', ACA'C', que tienen un eje comun AA', y cuyos planos son perpendiculares entre sí y perpendiculares al de la elipse generatriz. (p. 363)

Por tanto (CCGA5),

> Sean AB y AC dos cuartos de las dos elipses directrices, cuyos semi-ejes OA, OB y OC prolongados indefinidamente tomaremos por ejes de las x, de las y y de las z; llamaremos a, b y c á dichos semi-ejes [...] resultará la ecuacion $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. (pp. 363-364)

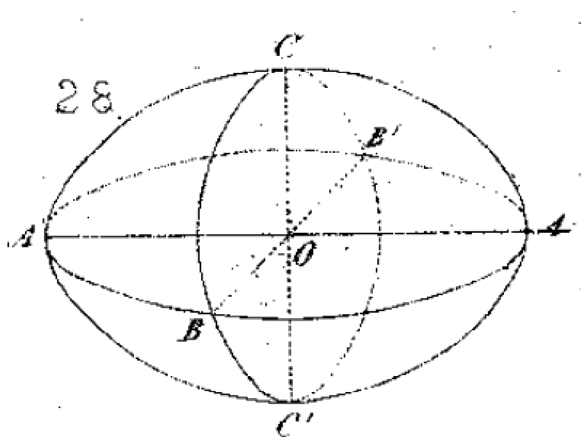


Figura 5-157. Representación del elipsoide en el *Tratado de Geometría analítica* (Cortázar, 1855, lámina 9)

- Hiperboloide de una hoja. Se define hiperboloide de una hoja (Figura 5-158) (CCGA5) como

> la superficie DEFG engendrada por una elipse ABA'B' de ejes variables, que se moviéndose paralelamente á sí misma, se apoya constantemente sobre otras dos hipérbolas DED'E'', FGF'G', que tienen un mismo eje segundo CC', y cuyos planos son perpendiculares entre sí y perpendiculares al de la elipse generatriz. (p. 364)

Por tanto (CCGA5),

> Para hallar la ecuacion del hiperboloide de una hoja, tomemos por ejes de coordenadas los dos ejes primeros y el eje segundo de las dos hipérbolas directrices, prolongados indefinidamente: sea ABFD la porcion del hiperboloide comprendida en el tiedro =xyz; sean a, b, c los semi-ejes OA, OB y OC de las dos hipérbolas directrices AD y BF [...] resulta la ecuacion del hiperboloide de una hoja, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$ (pp. 365-366)

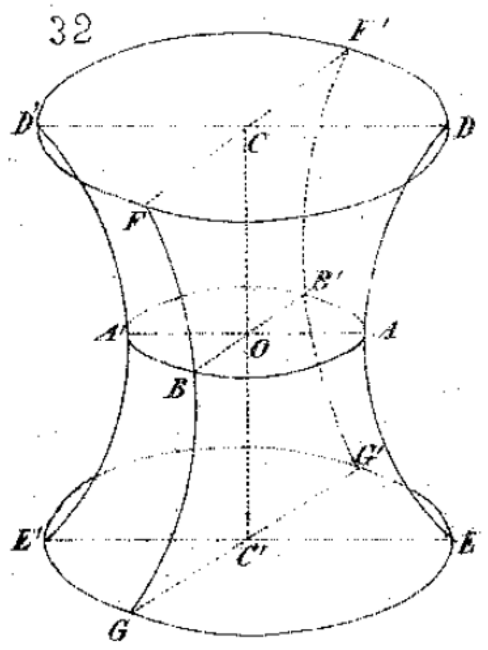


Figura 5-158. Hiperboloide de una hoja en el *Tratado de Geometría analítica* (Cortázar, 1855, lámina 9)

- Hiperboloide de dos hojas. Se define hiperboloide de dos hojas (Figura 5-159) (CCGA5) como

> la superficie ABCDEF engendrada por una elipse de ejes variables, que se moviéndose paralelamente á sí misma, se apoya constantemente sobre dos hipérbolas que tienen un mismo eje primero AD, y cuyos planos son perpendiculares entre sí y perpendiculares al de la elipse generatriz. (p. 366)

Por tanto (CCGA5),

> Para hallar la ecuacion de esta superficie, tomaremos por ejes de coordenadas los ejes de las hipérbolas directrices, prolongadas indefinidamente: llamemos a al semi-eje comun, b y c á los semi-ejes segundos de ambas hipérbolas [...] resulta la ecuacion del hiperboloide de dos hojas, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$. (pp. 366-367)

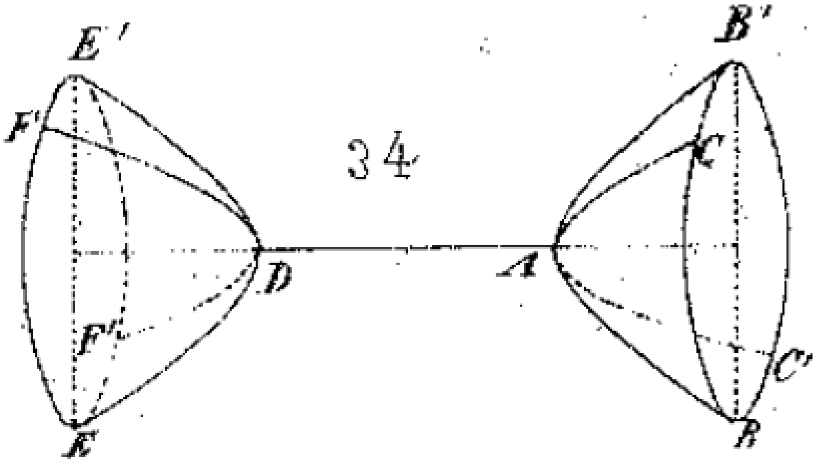


Figura 5-159. Hiperboloide de dos hojas en el *Tratado de Geometría analítica* (Cortázar, 1855, lámina 9)

Se expone a continuación, la transformación del sistema de coordenadas con el mismo objetivo en el caso de la Geometría plana, "teniendo la ecuacion de una superficie con respecto á ciertos ejes, hallar la ecuacion de la misma con respecto á otros ejes diferentes de los primeros, pero cuya posicion esté determinada con respecto á estos" (p. 380). Se distinguen dos casos de transformación: cambio a ejes paralelos a los originales y cambio de ejes rectangulares a oblicuángulos o rectangulares. Se estudian también las fórmulas de Euler para pasar de ejes rectangulares a otros también rectangulares.

En el siguiente capítulo se expone la clasificación de las superficies, en particular las superficies planas, cuya ecuación general es $Ax + By + Cz + D = 0$.

En los primeros capítulos del siguiente libro, se estudian planos tangentes, centros y planos diametrales de las superficies curvas algebraicas de segundo orden. En primer lugar, se define plano tangente a una superficie en uno de sus puntos al "plano formado por las infinitas tangentes á la superficie en dicho punto" (p. 389) (CCGA6). A continuación, se desarrolla el cálculo de la ecuación del plano tangente a una superficie de segundo orden por un punto conocido. Así, "la ecuación del plano tangente á la superficie de segundo órden en el punto (x', y', z') es $f'_{x'}.(x - x') + f'_{y'}.(y - y') + f'_{z'}.(z - z') = 0$" (p. 391) (CCGA6).

Posteriormente se estudia el cálculo de la ecuación normal a una superficie, entendiendo por normal a “la perpendicular al plano tangente en el punto de contacto” (p. 393) (CCGA6).

La obra continúa con el estudio de los centros y planos diametrales de las superficies de segundo orden. En primer lugar, se define centro de una superficie al “punto que divide en dos partes iguales á todas las cuerdas que pasan por él” (p. 394) (CCGA6). También se calculan las coordenadas del centro de una superficie general de segundo orden. Esto le lleva a la clasificación de las superficies de segundo orden con respecto a si tienen un solo centro, si no tienen centro o si tienen una infinidad de centros. La explicación se complementa con varios ejemplos.

A continuación, se define plano diametral de una superficie de segundo orden como el plano formado “por todos los puntos medios de un sistema de cuerdas paralelas a la superficie” (p. 403) (CCGA6).

En los siguientes capítulos se estudian las teorías de las superficies: elipsoide, hiperboloide de una hoja, hiperboloide de dos hojas, paraboloide elíptico y paraboloide hiperbólico (Tabla 5-8) (CCGA6). Aunque previamente, se reduce la ecuación general de cada superficie a expresiones más sencillas representándolas en sistemas de ejes rectangulares.

Tabla 5-8. *Aspectos que se estudian en las superficies de segundo orden en el Tratado de Geometría analítica de Cortázar, 1855.*

	Forma	**Secciones circulares**	**Planos tangentes**	**Planos diametrales y diámetros conjugados**
Elipsoide	X	X	X	X
Hiperboloide de una hoja	X	X	X	X
Hiperboloide de dos hojas	X	X	X	X
Paraboloide elíptico	X	X		
Paraboloide hiperbólico	X			

Además, se estudian los conos asintóticos en el caso de los hiperboloides y, las secciones cónicas en los casos del hiperboloide de una hoja y el paraboloide hiperbólico.

Se presenta el mapa conceptual (Figura 5-160) del contenido de la edición en el que se construye y demuestra algebraicamente los elementos y propiedades de la Geometría plana y del espacio.

Figura 5-160. Mapa conceptual del *Tratado de Geometría analítica* (1855)

Sistemas de representación

Se han localizado tres tipos de representaciones en el texto: el lenguaje verbal, las representaciones algebraicas y las representaciones gráficas.

- El lenguaje verbal predomina en el para definir conceptos, enunciar propiedades y resultados, realizar demostraciones, proponer ejemplos, ejercicios y problemas. Por ejemplo,

> La resolución de un problema gráfico por medio del cálculo algébrico consta de tres partes: 1ª. Poner el problema en ecuacion, 2.ª despejar la incógnita ó las incógnitas, 3.ª construir los valores de las incógnitas, cuando sean construibles por medio de la regla y el compás. (p. 17)

- Las representaciones algebraicas se usan frecuentemente para expresar algebraicamente igualdades y ecuaciones durante las demostraciones y resoluciones de ejercicios (Figura 5-161).

Ejemplos. **1.°** $x=\frac{abc-d^2e+f^3}{gh}$:

haremos

$$abc-d^2e+f^3=f^2\alpha,$$

siendo α el factor indeterminado; tendremos

$$\alpha=\frac{abc}{f^2}-\frac{d^2e}{f^2}+f,$$

espresion que ya sabemos construir; por consiguiente

$$x=\frac{f^2\alpha}{gh},$$

que tambien sabemos construir.

Figura 5-161. Representación algebraica en el *Tratado de Geometría analítica* (Cortázar, 1855, p. 9)

- Por último, para aclarar ejemplos, demostraciones de teoremas y resolución de ejercicios y problemas, se usan representaciones gráficas (Figura 5-162).

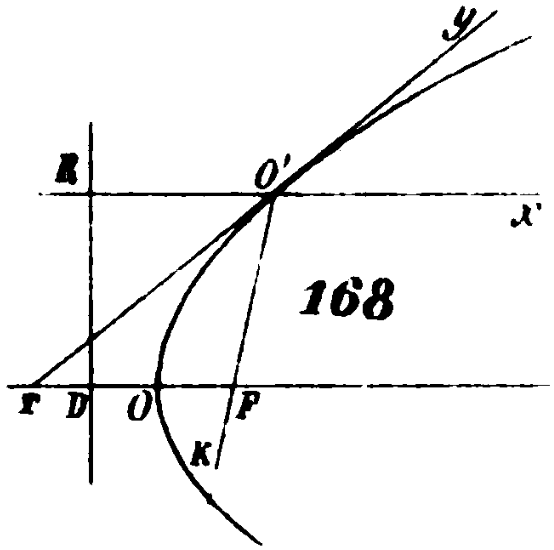


Figura 5-162. Representación gráfica en el *Tratado de Geometría analítica* (Cortázar, 1855, lámina VI)

Fenomenología

Se han encontrado dos tipos de fenómenos o contextos, los fenómenos estrictamente matemáticos, en particular geométricos y un ejemplo de fenómenos físico asociado al desplazamiento de dos móviles.

- Debido a que la obra se desarrolla en un contexto fundamentalmente matemático a la hora de realizar demostraciones, enunciar ejemplos y proponer ejercicios y problemas, el fenómeno más usado es el geométrico. Por ejemplo: “Inscribir en un triángulo un rectángulo que tenga una área dada” (p. 22).
- Por otro lado, se hace uso, una única vez, de una situación asociada a uno desplazamiento de dos móviles para demostrar un teorema relativo a las proyecciones de superficies sobre los ejes coordenados (Figura 5-163).

Fig. 41. 2.° Si dos móviles salen de uno de los vértices de un polígono plano ó alabeado (a), y uno de los dos recorre un lado del mismo polígono, y el otro recorre sucesivamente los otros lados de dicho polígono, la proyeccion del primer lado es igual á la suma de las proyecciones de los otros lados.

Figura 5-163. Fenómeno asociado al desplazamiento en el *Tratado de Geometría analítica* (Cortázar, 1855, p. 381)

Estrategias didácticas

Cortázar se sirve del prólogo de la obra para justificar los contenidos que incluye la misma y, aunque él mismo admite que no se trata de un estudio completo de la Geometría analítica, esta y el resto de obras contemporáneas del mismo nombre, abarcan la parte que no requiere de los conocimientos del Cálculo diferencial e integral (SCO).

Con el objetivo de ayudar a alcanzar al lector el conocimiento de la asignatura, Cortázar aporta diversas sugerencias y propuestas como exponer y justificar los objetivos concretos que persigue la disciplina; el aporte de teoremas que ayudan a verificar los cálculos y observar si se han cometido errores; la exposición de diferentes métodos para resolver un mismo ejercicio y la justificación del más adecuado en cada caso o; la contribución de estrategias que ayudan a simplificar el número de cálculos que requiere un algoritmo (SPM).

A pesar de tratarse de una materia fundamentalmente teórica, se incluyen diferentes aplicaciones de resultados propios de Geometría analítica a teoremas o resolución de problemas que forman parte de la Geometría elemental, como, por ejemplo:

- la demostración de "Las perpendiculares levantadas en los puntos medios de los lados de un triángulo se cortan en un mismo punto" (p. 102) o
- la resolución del problema "Hallar el área de un triángulo dadas las coordenadas rectangulares de sus tres vértices" (p. 109) (APL).

Por último, cabe destacar el interés de Cortázar por mostrar de manera gráfica y manipulativa las demostraciones de los teoremas y detallar cada uno de los pasos que forman parte de la resolución de un problema. Por ello, incorpora al final del tratado diez láminas con representaciones gráficas como la que se muestra en la Figura 5-164 (RG) y apuesta por el uso de materiales manipulativos como la escuadra, la regla o tiras de papel, el compás y el hilo, este último dedicado exclusivamente a la construcción de las cónicas:

> Para construir esta curva por un movimiento contínuo, se coloca una regla F'x, de modo que uno de sus extremos esté en F´, y que dicha regla coincida con F´x: se toma un hilo cuya longitud sea F´x-AC, y se fijan sus estremos en el foco F y en el estremo x de la regla.
>
> Póngase el hilo tirante por medio de un estilo; y colocándole al lado de la regla en A, será A el vértice de la hipérbola. Muévase en seguida la regla al rededor del foco F`, la cual empujará al estilo, y permaneciendo el hilo siempre tirante, el estilo describirá una curva AM, que será un ramo de hipérbola. (p. 230) (MM)

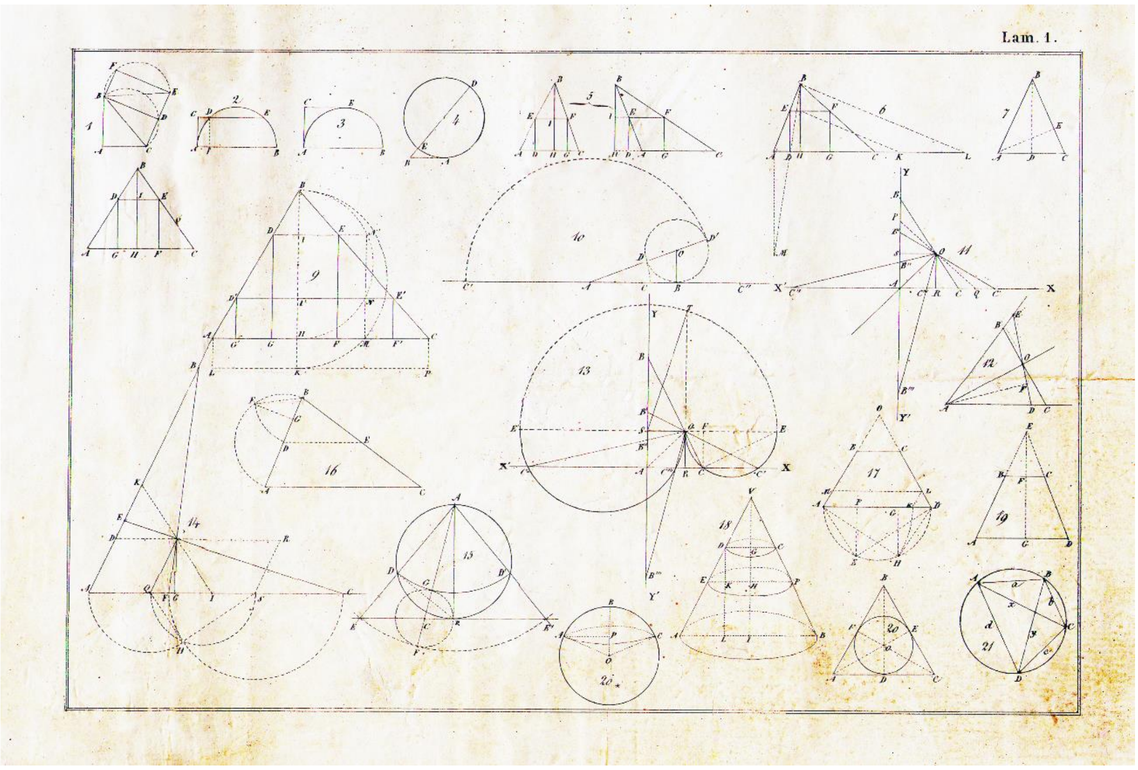
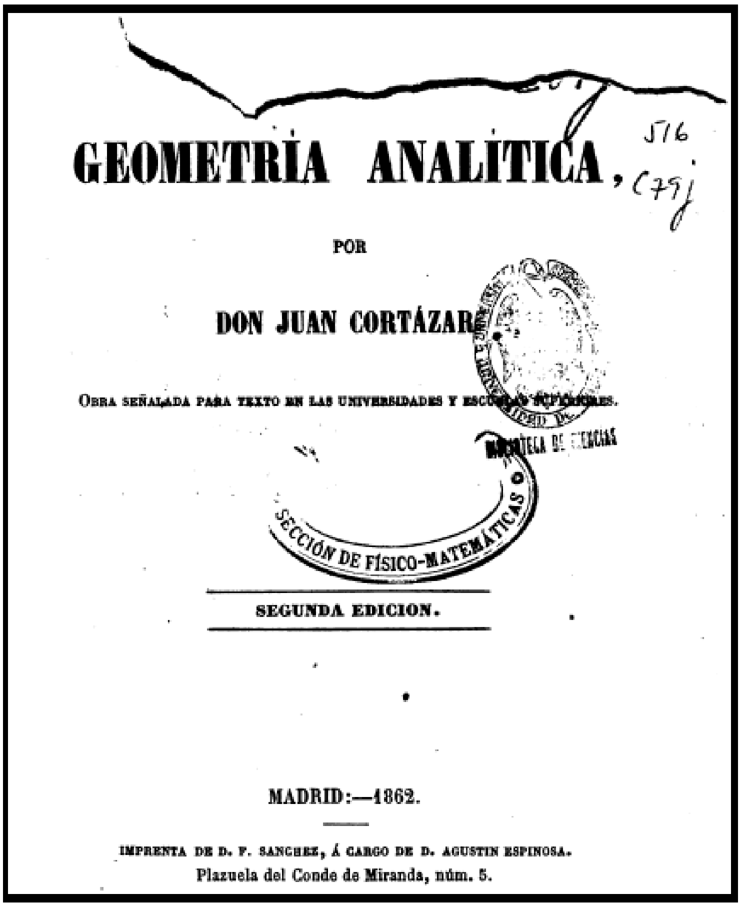


Figura 5-164. Lámina con representaciones gráficas en el *Tratado de Geometría analítica* (Cortázar, 1855)

5.6.2.2. Periodo 3 (1857-1873): Segunda edición

La segunda edición fue impresa en Madrid en 1862 en la Imprenta de D. F. Sánchez, a cargo de D. Agustín Espinosa (CE2 y CE3). Este ejemplar puede encontrarse en las bibliotecas de las Universidades Complutense y Politécnica de Madrid. Ha sido localizada a través del repositorio digital de Google Books (CE4).



GEOMETRIA ANALITICA,

516 (79)

POR

DON JUAN CORTÁZAR,

OBRA SEÑALADA PARA TEXTO EN LAS UNIVERSIDADES Y ESCUELAS SUPERIORES.

SEGUNDA EDICION.

MADRID:—1862.

IMPRENTA DE D. F. SANCHEZ, Á CARGO DE D. AGUSTIN ESPINOSA.
Plazuela del Conde de Miranda, núm. 5.

Figura 5-165. Portada del *Tratado de Geometría analítica* (Cortázar, 1862)

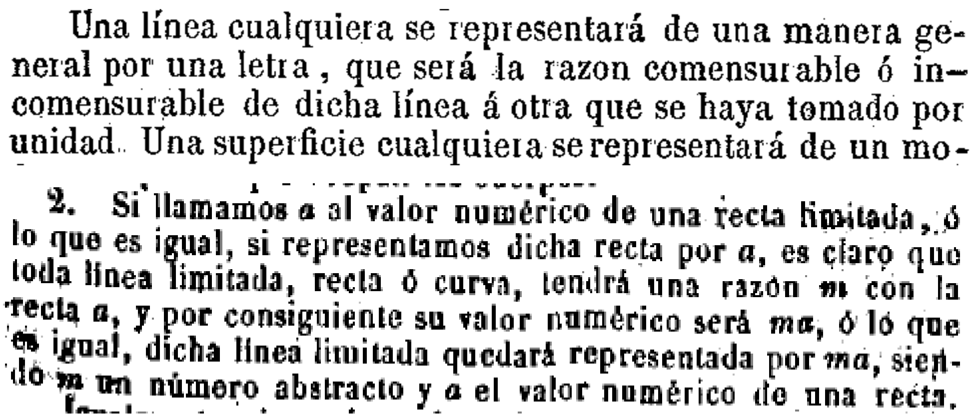
En esta nueva edición, se reduce el número de páginas a 379 y cuenta con un total de 34 capítulos. Se reduce también el número de láminas con representaciones gráfica a 8 en total. Con respecto al índice de contenidos, son eliminados algunos capítulos de la primera edición, para ser incorporados en otros, siguiendo una secuenciación diferente (CE5).

Estructura conceptual

La segunda edición posee aproximadamente, unas 100 páginas menos que la primera. Si bien es cierto que, son eliminados algunos de los capítulos y artículos de mayor dificultad, los contenidos que incluye la segunda edición, son similares. En concreto, se elimina el estudio de las ecuaciones de particulares de rectas y planos, pasando a estudiar ampliamente el caso general.

Por otro lado, se reorganiza la secuenciación de los temas, buscando una mayor conexión entre la exposición de los resultados y teoremas y su aplicación a la resolución de ejercicios y problemas. Por ejemplo, los problemas sobre las rectas y los planos, se sitúan tras la explicación teórica de sus ecuaciones y no, al final del bloque correspondiente.

En general, añade más ejemplos por cada concepto estudiado y particulariza los enunciados de algunos problemas, por ejemplo, centrando la atención en el estudio de las ecuaciones de líneas y superficies con respecto a ejes rectangulares. También acompaña con expresiones algebraicas algunas demostraciones de teoremas, que clarifican la secuencia de los razonamientos. Un ejemplo de lo anterior, puede observarse en la introducción de la obra, cuando expone la representación de las líneas, superficies y espacios, para poder resolver problemas geométricos a través del Álgebra (Figura 5-166).



Una línea cualquiera se representará de una manera general por una letra, que será la razon comensurable ó incomensurable de dicha línea á otra que se haya tomado por unidad. Una superficie cualquiera se representará de un mo-

2. Si llamamos *a* al valor numérico de una recta limitada, ó lo que es igual, si representamos dicha recta por *a*, es claro que toda línea limitada, recta ó curva, tendrá una razon *m* con la recta *a*, y por consiguiente su valor numérico será *ma*, ó lo que es igual, dicha línea limitada quedará representada por *ma*, siendo *m* un número abstracto y *a* el valor numérico de una recta.

Figura 5-166. Uso de expresiones algebraicas en la segunda edición del *Tratado de Geometría analítica* (Cortázar, 1855; 1862)

Las curvas elipse, hipérbola y parábola son estudiadas en profundidad en ambas ediciones, sin embargo, la segunda edición incorpora numerosas notas sobre las principales características de estas curvas inmediatamente después de la definición de cada una de ellas, lo que ayuda al lector a asimilar las propiedades de las curvas previamente a la exposición de cada una de las teorías.

Sistemas de representación

La edición no presenta cambios con respecto a los sistemas de representación.

Fenomenología

En la segunda edición de la obra, se elimina la situación relativa a desplazamientos de dos móviles, por tanto, todas las situaciones halladas en la obra son de tipo matemático, en particular, de tipo geométrico.

Estrategias didácticas

Como hemos comentado anteriormente, en esta edición Cortázar se apoya en representaciones algebraicas para realizar algunas demostraciones de teoremas, que en la anterior edición solo indicaba con lenguaje natural. Modifica asimismo la secuenciación de algunos contenidos, como los ejercicios y problemas resueltos que sitúa tras la exposición de las propiedades y teoremas de su respectivo capítulo o las propiedades de las curvas cónicas que sitúa tras sus respectivas definiciones. Todo ello evidencia el interés de Cortázar para ayudar al lector a asimilar y clarificar los contenidos de la disciplina (SPM).

Conclusiones

Si bien Cortázar dejó constancia de que no comprendía la resolución de los problemas geométricos mediante métodos diferenciales e integrales, desarrolló formalmente los problemas generales de geometría plana y los del espacio de forma bastante completa, aunque solo hasta las superficies de segundo orden (Irueste, 1912).

La formalidad y rigurosidad características de las obras de Cortázar, encuentran su máxima representatividad en los tratados destinados a los estudios superiores. Aun así, a lo largo de la obra se incluyen numerosas notas con sugerencias, además de láminas con representaciones gráficas que ayudan al lector en el estudio de la disciplina. En particular, en esta obra destaca el uso de material manipulable para reforzar el aprendizaje de las curvas cónicas.

Todos los resultados vienen acompañados de su rigurosa demostración o de la referencia en la que se encuentran ubicados, en alguna otra de sus obras. Por ello, el tipo de representación más habitual es el lenguaje verbal, apoyado en las representaciones algebraicas.

Es destacable la gran variedad de ejemplos y situaciones que se encuentran; desde el estudio de los números negativos, hasta la resolución de ecuaciones, pasando por el cálculo de expresiones algebraicas. Sin embargo, el uso de contextos y situaciones es escaso, únicamente se encuentran fenómenos de tipo estrictamente matemático, en particular de tipo geométrico.

5.7. Obra: *Tratado de Trigonometría y Topografía*

5.7.1. Caracterización general

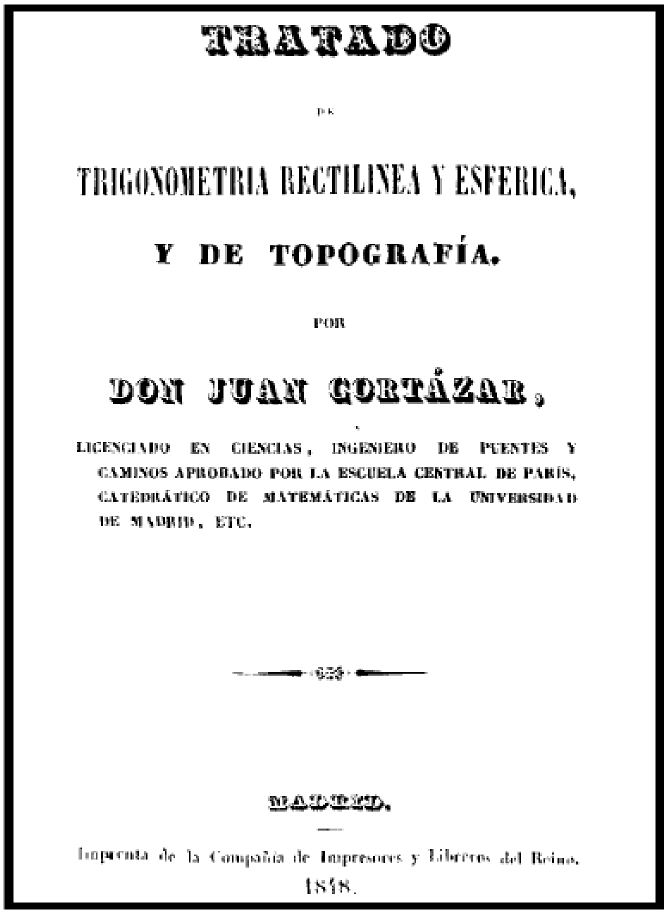
Entre los tratados destinados a la enseñanza secundaria escritos por Cortázar, el *Tratado de Trigonometría y Topografía* (CO1), es el menos reeditado de todos. Fue publicado en 1848 y reeditado en 24 ocasiones, la última ocasión en el año 1925 (CO2 y CO3). Al igual que los *Tratados de Aritmética, Álgebra elemental y Geometría elemental*, fue elegido para formar parte de las listas de libros de texto oficiales para la enseñanza secundaria en el año 1848 (Gaceta de Madrid de 15 de septiembre de 1848) (CO5). Hasta la undécima edición el tratado se titulaba *Tratado de Trigonometría rectilínea y esférica y de Topografía*; en adelante su título fue *Tratado de Trigonometría y Topografía*.

Los académicos de la época, consideraban el tratado como un modelo de orden y sencillez, de hecho, la secuenciación de los contenidos seguida en la obra, fue adoptada más tarde por reputados autores de libros de Trigonometría o Topografía. Entre los cambios más importantes, se encuentran la inclusión de las analogías de Delambre o la reducción de las líneas trigonométricas a las esenciales, eliminando aquellas que pueden deducirse de las demás (Irueste, 1912) (CO6).

5.7.2. Caracterización de las ediciones

5.7.2.1. Periodo 2 (1845-1857): Primera edición

La edición analizada corresponde a la primera, impresa en Madrid en el año 1848 por la Imprenta de la Compañía de Impresores y Libreros del Reino (CE2 y CE3). Para tal fin, se usó un ejemplar que se encuentra en la Biblioteca de la Universidad Politécnica de Madrid al que se ha accedido a través de la versión digitalizada en el repositorio digital de la Biblioteca Nacional de España (CE4). Esta edición se titula *Tratado de Trigonometría rectilínea y esférica y de Topografía* (CE1). En el prólogo reza la advertencia: "El *Tratado de Topografía*, aunque colocado después de la Trigonometría, puede estudiarse antes, omitiendo aquellas teorías en que se hace uso de la Trigonometría Rectilínea" (CE6).



TRATADO

DE

TRIGONOMETRIA RECTILINEA Y ESFERICA,

Y DE TOPOGRAFÍA.

POR

DON JUAN CORTÁZAR,

LICENCIADO EN CIENCIAS, INGENIERO DE PUENTES Y CAMINOS APROBADO POR LA ESCUELA CENTRAL DE PARÍS, CATEDRÁTICO DE MATEMÁTICAS DE LA UNIVERSIDAD DE MADRID, ETC.

MADRID.

Imprenta de la Compañía de Impresores y Libreros del Reino.
1848.

Figura 5-167. Portada del *Tratado de Trigonometría rectilínea y esférica y de Topografía* (Cortázar, 1848)

La obra posee 152 páginas y está organizada en tres partes principales: Trigonometría rectilínea, Trigonometría esférica y Topografía. Los 21 capítulos que lo forman están dedicados a la resolución de triángulos y a su aplicación al estudio de la Topografía (Tabla 5-9). Por otro lado, incluye cuatro láminas con representaciones que apoyan las explicaciones de las resoluciones de problemas y demostraciones de teoremas y resultados principales (CE5).

La obra usa un lenguaje formal en su primera parte, dedicada al estudio de la Trigonometría, basada en definiciones, exposición y demostración de resultados y planteamiento y resolución de ejercicios y problemas. Sin embargo, en la segunda parte dedicada al estudio de la Topografía, se percibe un lenguaje más coloquial, destinado a la exposición de los métodos de cálculo de distancias, alturas y superficies del terreno.

Tabla 5-9. *Índice del Tratado de Trigonometría rectilínea y esférica y de Topografía de Juan Cortázar, 1848.*

TRIGONOMETRÍA RECTILÍNEA	
LIBRO I - Líneas trigonométricas	Págs. 1-33
Nociones preliminares - Valores de las líneas trigonométricas de varios arcos particulares - Relaciones entre las líneas trigonométricas de un arco - Relaciones entre las líneas trigonométricas de tres arcos a, b y $a \pm b$ - Construcción de las tablas trigonométricas - Disposición y uso de las tablas trigonométricas.	
LIBRO II – Resolución de triángulos	Págs. 34-58
Teoremas de los triángulos – Resolución de los triángulos rectángulos – Resolución de los triángulos oblicuángulos o generales.	
TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA	
Fórmulas generales – Resolución de los triángulos esféricos rectángulos – Resolución de los triángulos oblicuángulos o generales – Resolución de los triángulos esféricos en los cuatro casos 1.º, 2.º, 5.º y 6.º por las analogías de Neper y las de Delambre – Discusión del caso dudoso de la trigonometría esférica.	Págs. 59- 98
TOPOGRAFÍA	
Nociones preliminares – Operaciones fundamentales – Medición de distancias inaccesibles – Medición de alturas inaccesibles – Nivelación – Levantamiento de planos – Medición de superficies – División de terrenos	Págs. 99- 152

Con respecto a las referencias que se hacen en la obra sobre otros autores, se cita a Descartes y su principio de generalización de las ecuaciones, como aplicación particular a los signos de las líneas trigonométricas, a Lalande como creador de las tablas trigonométricas, a Mr. Marie por su extensión de las tablas trigonométricas a siete decimales, a Neper y Delambre y sus analogías para resolver triángulos esféricos. Además, hace continuas referencias a sus *Tratados de Aritmética*, *Álgebra elemental* y *Geometría elemental*.

Estructura conceptual

La introducción del tratado repasa aquellas nociones preliminares necesarias para el estudio de la Trigonometría, no sin antes señalar que es necesario recurrir al cálculo para resolver problemas sobre triángulos en los que los datos son numéricos, ya que, mediante las construcciones geométricas, los resultados serían aproximados, nunca exactos, debido a los errores cometidos por los instrumentos de medida. Es por ello que se define la Trigonometría rectilínea como “la ciencia que trata de la resolucion de los triángulos rectilíneos por medios del cálculo” (p. 1) (CCTT1).

Esto le lleva a la definición de las ecuaciones que relacionan los lados con los ángulos de un triángulo, es decir, las líneas trigonométricas (CCTT2). Se señalan seno, tangente, coseno y cotangente como las cuatro líneas trigonométricas, cuyas notaciones pueden verse en la Figura 5-168.

sen , tg , cos , cot

Figura 5-168. Notación de las cuatro líneas trigonométricas en el *Tratado de Trigonometría rectilínea y esférica y de Topografía* (Cortázar, 1848, p.2)

Las definiciones dadas de las líneas trigonométricas (CCTT2) son:

> Se llama seno de un arco ó de su ángulo correspondiente la perpendicular bajada desde un estremo del arco al radio ó diámetro que pasa por el otro extremo.
>
> Se llama tangente de un arco ó de su ángulo correspondiente la parte de la tangente geométrica tirada en un estremos del arco, y contada desde este estremo hasta su encuentro con la prolongación del radio que pasa por el otro estremo.
>
> Se llama coseno y cotangente de un arco ó de su ángulo correspondiente el seno y tangente del complemento del arco ó del ángulo (a). (p.2)

La definición se completa con diferentes ejemplos de la construcción geométrica de cada una de las líneas (Figura 5-169) (CCTT2), por ejemplo, “Así, si el arco es AB, su seno es BD, su tangente AF, su coseno BE ó su igual OD, y su cotagente CG” (p. 2).

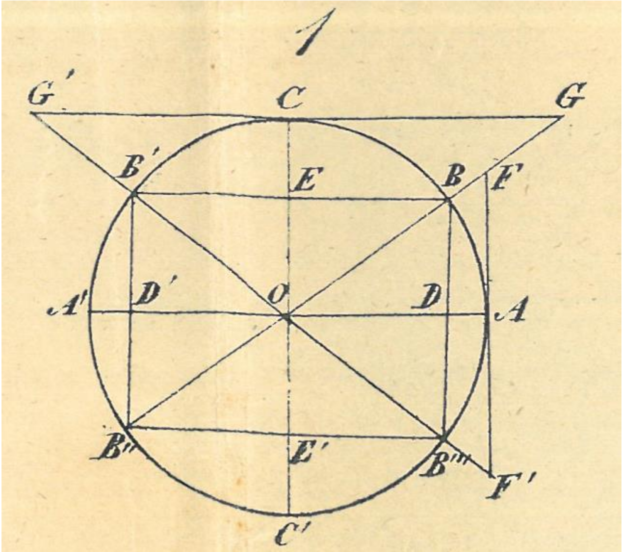


Figura 5-169. Construcción de las líneas trigonométricas en el *Tratado de Trigonometría rectilínea y esférica y de Topografía* (Cortázar, 1848, lámina I)

También se definen las restantes líneas trigonométricas (CCTT2), es decir, la secante, el seno-verso, la cosecante y el coseno-verso, pero señala que prescindirá de ellas ya que, "actualmente no se hace uso de estas cuatro líneas trigonométricas" (p. 3).

Para generalizar las definiciones de líneas trigonométricas a los ángulos mayores de 90º, señala los siguientes convenios: 1º. Se considera "como negativas á las líneas trigonométricas cuya posicion sea contraria á la que tienen cuando el arco es menor que un cuadrante" (p. 3). 2º. Se llama "complemento de un arco á otro arco que sumado con el primero dé de suma un cuadrante; de modo que, si el arco es mayor que un cuadrante, su complemento será negativo" (p. 3). 3º. Por último, se consideran "negativos á los arcos contados desde el punto A en el sentido AC´A´" (p. 3) (Figura 5-169).

Lo anterior le lleva a escribir las líneas trigonométricas del ángulo opuesto (arco negativo), del complementario y del suplementario de un ángulo, en función de las líneas de dicho ángulo. Asimismo, señala el valor de las líneas trigonométricas de ángulos mayores a 360º (CCTT2).

A continuación, se expresan los valores de las líneas trigonométricas de los ángulos particulares 0º, 30º, 60º, 45º, 90º, 180º, 270º y 360º, así como las diferentes relaciones entre las líneas trigonométricas y el radio de la circunferencia r, todas ellas acompañadas de su respectiva demostración a través de la semejanza de triángulos. Se indica también que a partir de las fórmulas anteriores pueden calcularse tres de las cuatro cantidades que entran en juego (sen a, cos a, tg a y r) a partir de una de ellas.

En el siguiente capítulo, se desarrollan y demuestran las fórmulas de los senos, cosenos y tangentes de la suma y diferencia de dos ángulos, del doble de un ángulo y del ángulo mitad (CCTT2). Esto le lleva a plantear problemas en los que hay que transformar la suma o diferencia de varias líneas trigonométricas en productos de líneas trigonométricas. Por ejemplo: “Convertir en producto la suma $sen\ a + \cos b$” (p. 24).

Gracias a lo anterior, se indica el método para construir las tablas trigonométricas que se necesitan para obtener el valor de un ángulo, dada alguna de sus líneas trigonométricas, y viceversa. Asimismo, se indica su uso mediante ejemplos, a partir de las tablas de Lalande, que contienen los logaritmos de los senos, tangentes, cotangentes y cosenos de los ángulos menores de 90º.

El libro segundo, dedicado a la resolución de triángulos, se detiene en el primer capítulo a exponer y demostrar los teoremas relativos a las razones trigonométricas de los lados de los triángulos (CCTT3). En primer lugar, como consecuencia de las definiciones de las líneas trigonométricas y, tomando como valor del radio de la circunferencia la unidad, se demuestran los resultados que en los triángulos rectángulos relacionan:

- el valor de los catetos con la hipotenusa con el seno o el coseno del ángulo comprendido, es decir, “En todo triángulo rectángulo un cateto cualquiera es igual á la hipotenusa multiplicada por el seno del ángulo opuesto al cateto, ó por el coseno del ángulo comprendido.” (p. 34) y,
- el valor de los catetos con la tangente del ángulo que abarcan, es decir, “En todo triángulo rectángulo un cateto cualquiera es igual al otro cateto multiplicado por la tangente del ángulo opuesto al primero” (p. 35)

Tras la demostración de ambos teoremas, una nota reza: “Estos dos teoremas y el de Pitágoras son suficientes para la resolucion de los triángulos rectángulos” (p. 35).

Asimismo, para los triángulos en general, se demuestran los resultados que relacionan (CCTT3):

- los lados de los triángulos y los senos de los ángulos opuestos, es decir "En todo triángulo los lados son proporcionales á los senos de los ángulos opuestos" (p. 35) y,
- el cuadrado de los lados con el doble del producto de dos lados y el ángulo que abarcan (Figura 5-170).

33. *En todo triángulo el cuadrado de un lado es igual á la suma de cuadrados de los otros dos lados, menos el duplo del producto de estos lados por el coseno del ángulo comprendido*; es decir, $a^2=b^2+c^2-2bc \cos A$.

Figura 5-170. Teorema sobre triángulos en el *Tratado de Trigonometría rectilínea y esférica y de Topografía* (Cortázar, 1848, p. 37)

A continuación, y, gracias a las bases teóricas sentadas en el capítulo anterior, se clasifican los diferentes tipos de ejercicios sobre resolución de triángulos. Con respecto a los triángulos rectángulos, se tiene en cuenta que,

> En un triángulo rectángulo se conoce el ángulo recto, y por tanto bastará conocer dos de las otras cinco partes del triángulo, entre ellas por lo menos un lado, para que el problema de la resolución de los triángulos sea determinado". (p. 42)

Es fácil, por tanto, señalar teóricamente el método a seguir para resolver las incógnitas de los triángulos, en cada uno de los casos que pueden surgir (CCTT3):

- Dados los dos catetos.
- Dados la hipotenusa y un cateto.
- Dados un cateto y un ángulo agudo.
- Dados la hipotenusa y un ángulo agudo.

Destaca que no se aportan ejemplos para clarificar los métodos expuestos, sin embargo, se aportan los cinco datos de un triángulo rectángulo, para que el lector tome dos de ellos, resuelva el triángulo y compruebe si la respuesta es correcta (Figura 5-171).

39. Hé aqui las cinco partes de un triángulo rectángulo, que pueden servir para darse dos cualesquiera, y ver si los valores de las tres incógnitas estan bien hallados.

$a=142,5$	
$b=85,5$	$B=36^{\circ}\ 52'\ 11'',6$
$c=114$	$C=53\ \ 7\ \ 48,3.$

Figura 5-171. Ejercicio resuelto en el *Tratado de Trigonometría rectilínea y esférica y de Topografía* (Cortázar, 1848, p. 46)

Análogamente en el caso de los triángulos en general, se plantean problemas sobre resolución de triángulos en los siguientes casos (CCTT3):

- Dados dos lados y el ángulo comprendido.
- Dados un lado y dos ángulos.
- Dados los tres lados.
- Dados los lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

El ejercicio propuesto en esta ocasión, contiene los seis datos de un triángulo, para que el lector tome tres de ellos, se resuelva el triángulo y se compruebe el resultado (Figura 5-172).

45. Hé aqui las seis partes de un triángulo que pueden servir para darse tres, y ver si los resultados que se hallen son exactos:

$a=332$	$A=56^{\circ}\ 30'\ 10''$
$b=305,7$	$B=50\ \ 10\ \ 30$
$c=381,376$	$C=73\ \ 19\ \ 20.$

Figura 5-172. Ejercicio propuesto en el *Tratado de Trigonometría rectilínea y esférica y de Topografía* (Cortázar, 1848, p. 58)

La trigonometría esférica entendida como "la ciencia que enseña á resolver los triángulos esféricos por medio del cálculo" (p. 59) (CCTT1), se expone en la siguiente parte del tratado. Análogamente al bloque anterior, en este se exponen los resultados y teoremas que relacionan los lados de los triángulos esféricos con los ángulos de estos y, tanto para triángulos esféricos rectángulos como generales, se clasifican los tipos de problemas teniendo en cuenta que "si se conocen tres de las seis partes del triángulo esférico, se podrán hallar las otras tres" (p. 62).

Por tanto, se desarrollan y demuestran los resultados (CCTT3):

- "En todo triángulo esférico el coseno de un lado es igual al producto de los cosenos de los otros dos lados, mas el producto de los senos de los mismos lados por el coseno del ángulo comprendido" (p. 59).
- "En todo triángulo esférico los senos de los lados son proporcionales á los senos de los ángulos opuestos" (p. 62)
- En todo triángulo esférico la cotangente de un lado por el seno de otro es igual al coseno de este por el coseno del ángulo comprendido, mas el seno de este ángulo por la cotangente del ángulo opuesto al primer lado (p. 64).
- En todo triángulo esférico el coseno de un ángulo es igual a menos el producto de los cosenos de los otros dos ángulos, mas el producto de los senos de los mismos ángulos por el coseno del lado adyacente á ambos (p. 65).

En el caso de los triángulos esféricos rectángulos, se conoce el ángulo recto, por tanto, la resolución de triángulos consistirá en hallar las tres partes restantes conociendo dos de ellas. Se plantean los métodos de resolución de triángulos en los siguientes casos (CCTT3):

- Dados los dos catetos.
- Dada la hipotenusa y un cateto.
- Dados la hipotenusa y un ángulo oblicuo.
- Dados un cateto y el ángulo oblicuo adyacente.
- Dados un cateto y el ángulo opuesto.
- Dados los dos ángulos oblicuos.

Únicamente se aportan ejemplos para el penúltimo caso, en el cual se debe resolver el triángulo conociendo los datos dados en la Figura 5-173.

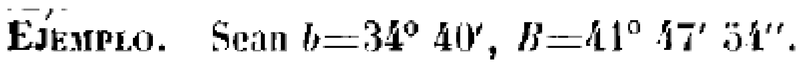

EJEMPLO. Sean $b=34°\ 40'$, $B=41°\ 47'\ 54''$.

Figura 5-173. Ejemplo propuesto en el *Tratado de Trigonometría rectilínea y esférica y de Topografía* (Cortázar, 1848, p. 73)

Análogamente, para el caso de los triángulos esféricos generales, se plantean los métodos de resolución para los casos (CCTT3):

- Dados dos lados y el ángulo comprendido.
- Dados dos ángulos y su lado adyacente.
- Dados los tres lados.
- Dados los tres ángulos.
- Dados los lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.
- Dados dos ángulos y el lado opuesto a uno de ellos.

Además del estudio particular de cada uno de estos seis casos mediante los teoremas de la trigonometría esférica, en el siguiente capítulo se estudian, los dos primeros y los dos últimos, a través de las analogías de Neper y Delambre.

La última parte del tratado está dedicada al estudio de la Topografía (CCTT1), cuya definición se da en primer lugar como, “la ciencia que enseña á hallar la magnitud y figura de un terreno de corta estensión” (p. 99).

Para comenzar a trabajar, serán necesarios varios instrumentos de medida, es este caso, las escalas y los semicírculos graduados. Comienza definiendo una escala como “una recta pequeña dividida en partes iguales, de las que cada una representa una unidad lineal, como un pie, una vara, una legua, etc.” (p. 99), se elige una escala particular y se explica cómo es su construcción (Figura 5-174) y cómo se toman sobre ella un cierto número de partes.

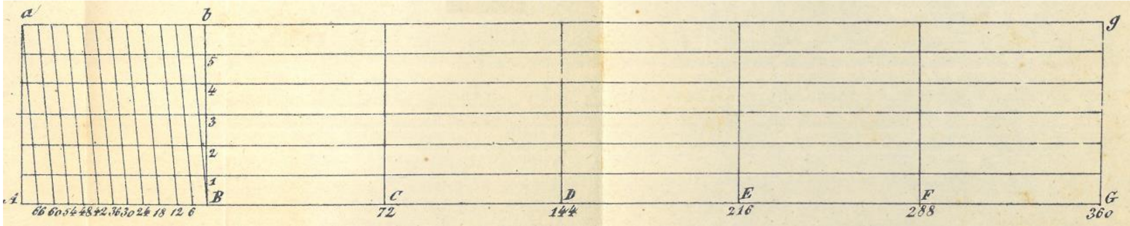


Figura 5-174. Construcción de una escala en el *Tratado de Trigonometría rectilínea y esférica y de Topografía* (Cortázar, 1848, lámina I)

Análogamente se explica que el semicírculo graduado (Figura 5-175), "sirve para construir en el papel un ángulo de un cierto número de grados; y al contrario, para medir el número de grados de un ángulo dado en el papel (p. 101).

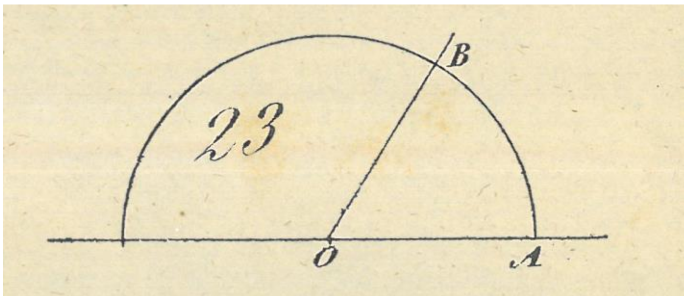


Figura 5-175. Construcción de un ángulo mediante el semicírculo graduado en el *Tratado de Trigonometría rectilínea y esférica y de Topografía* (Cortázar, 1848, lámina I)

Puesto que con el semicírculo graduado no se puede construir un ángulo con una graduación dada mediante grados y minutos, se explica cómo hacerlo usando únicamente el compás, la escala y las tablas de logaritmos. Sin embargo, también se advierte que la construcción no es del todo exacta ya que depende del tamaño del papel sobre el cual se opera.

A continuación, se resuelven de nuevo los cuatro casos dados en la primera parte del libro, de resolución de triángulos rectángulos, pero en esta ocasión, mediante construcciones geométricas. Se aportan y resuelven cuatro ejemplos con datos particulares, uno por cada uno de los casos.

Antes de terminar el capítulo, describe la plomada, el nivel de aire y el nivel de albañil, como instrumentos que sirven para colocar un plano vertical u horizontalmente.

Los siguientes y últimos capítulos del tratado, están dedicados a las operaciones fundamentales de la Topografía. Previamente se describen las características y el uso dado a diversos instrumentos de medida - *cadenilla* o *cuerda*, *escuadra* o *cartabón* de agrimensor, *grafómetro*, *brújula*, *plancheta* o *jalones* - de los cuales se sirve para exponer las operaciones básicas de la Topografía. Podemos clasificar las operaciones básicas en (CCTT4):

- Construcción de perpendiculares y paralelas a rectas de un terreno, a través de la cadenilla o cuerda o bien, por medio de la escuadra o el cartabón de agrimensor. En particular, se resuelven los siguientes problemas:
    - Trazar la perpendicular a una recta por uno de sus puntos.
    - Trazar una perpendicular a una recta por un punto exterior a esta.
    - Trazar una paralela a una recta por un punto exterior a esta.
- Medidas de ángulos, a través del grafómetro, brújula, cuerda o plancheta. En particular, se resuelven:
    - Calcular el ángulo formado por las dos rectas que forman tres puntos no alineados de un terreno.
    - Calcular la medida del ángulo formado por dos rectas a cuyos lados no se puede acceder.
- Problemas de alineación, entendiéndola como la "interseccion con el terreno del plano vertical que pasa por dos puntos dados en él (p. 114). En particular, se resuelven:
    - Calcular la alineación determinada por dos puntos de un terreno.
    - Calcular dos puntos de un terreno que se encuentren en la alineación de otros dos puntos dados.
- Problemas de medición de líneas accesibles por medio de la cuerda o la cadena.
- Determinación de puntos en el terreno. En particular, se resuelven:
    - Determinar la posición de un punto del terreno con respecto a otros dos puntos dados.
    - Determinar la posición de un punto del terreno con respecto a otros tres puntos dados.
- Problemas de medición de distancias inaccesibles, mediante jalones, cartabón, plancheta, grafómetro y brújula. En particular, se resuelven,
    - Calcular la distancia accesible por un extremo e inaccesible por el otro.

  - Calcular la distancia inaccesible por ambos extremos.
- Problemas de medición de alturas inaccesibles mediante jalones, plancheta, grafómetro, por medio de las sombras o por reflexión. En particular, se resuelven:
  - Calcular una altura cuya base es inaccesible, si el terreno es horizontal.
  - Calcular una altura cuya base es accesible, sin que el terreno sea horizontal.
  - Calcular una altura completamente inaccesible, si el terreno es llano (Figura 5-176).

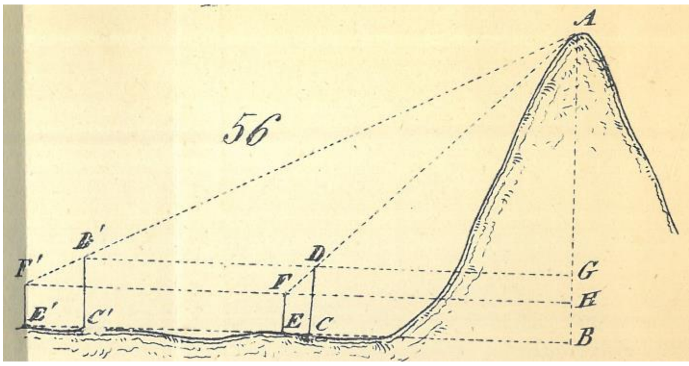


Figura 5-176. Medición de alturas inaccesibles en el *Tratado de Trigonometría rectilínea y esférica y de Topografía* (Cortázar, 1848, lámina III)

- Problemas de nivelación, entendida como "la operación por medio de la cual se halla la diferencia de altura vertical de dos puntos del terreno" (p. 129). En particular, se resuelven ejercicios de:
  - Nivelación simple, es decir, el cálculo de la diferencia de nivel entre dos puntos cuya distancia horizontal no supera las 600 varas.
  - Nivelación compuesta (Figura 5-177), cuando el cálculo de la diferencia de nivel es entre dos puntos cuya distancia horizontal supera las 600 varas o bien el terreno es desigual.

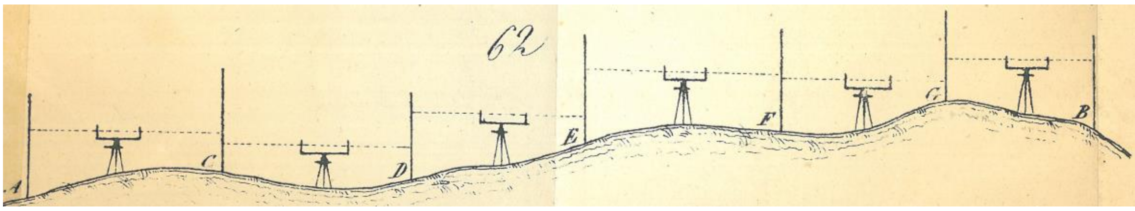


Figura 5-177. Nivelación compuesta en el *Tratado de Trigonometría rectilínea y esférica y de Topografía* (Cortázar, 1848, lámina III)

- Problemas de levantamiento de planos, es decir, de construcción del plano de un terreno. Se resuelven:
    - Dibujar el plano con unas condiciones dadas.
    - Dibujar el plano de un terreno inaccesible.
    - Dibujar el plano de un camino o del curso de un rio.
    - Dibujar el plano de un terreno terminado en una o varias curvas.
- Problemas de medición de superficies. En particular, se resuelven ejercicio sobre:
    - Calcular el área de un triángulo, dados dos lados y el ángulo que queda comprendido entre ellos .
    - Calcular el área de un triángulo, dados un lado y sus tres ángulos.
    - Calcular el área de un triángulo, dados sus tres lados.
    - Calcular el área de un triángulo, dados dos lados y el ángulo opuesto a este.
    - Calcular el área del paralelogramo, dados dos lados y el ángulo que queda comprendido entre ellos.
    - Calcular el área del cuadrilátero, dadas sus dos diagonales y el ángulo que forman.
    - Calcular el área de un polígono regular, dados el número de lados y su longitud.
    - Calcular el área de un terreno inaccesible.
    - Calcular el área de una figura que tiene algunos lados rectos y otros curvos.
- Problemas de división de terrenos. En particular, se resuelven:
    - "Dividir un triángulo en un cierto número de partes equivalentes por medio de rectas tiradas desde uno de los vértices al lado opuesto" (p. 141).
    - "Dividir un triángulo en dos partes que esten en la razon m á n por medio de una recta tirada desde uno de los vértices al lado opuesto" (p. 142).

- “Dividir un triángulo ABC en dos partes que esten en la razón de m á n por medio de una paralela á uno de los lados AB” (p. 142).
- “Dividir un triángulo ABC en dos partes que esten en la razon m:n por medio de una recta cuya direccion sea dada” (p. 144).
- “Dividir un triángulo en dos partes que esten en una razon dada, por medio de una perpendicular á uno de sus lados AC” (p. 143).
- “Dividir un trapecio en dos partes que esten en una razon dada por medio de una paralela á las bases” (p. 143).
- “Dividir un polígono cualquiera en varias partes equivalentes por medio de paralelas á una recta dada” (p. 147).
- “Dado un ángulo y un punto en uno de sus lados, tirar desde dicho punto una recta, que con las dos del ángulo forme un triángulo que tenga una área dada” (p. 148).
- “Dividir un polígono en cualquier número de partes equivalentes, que todas tengan un punto comun” (p. 149).

Se presenta un mapa conceptual (Figura 5-178) del contenido de la edición, en el que se plasma el recorrido seguido en esta, que incluye el estudio de la resolución de triángulos, mediante las razones trigonométricas y el estudio de los problemas asociados a la agrimensura, mediante los diferentes instrumentos de medida.

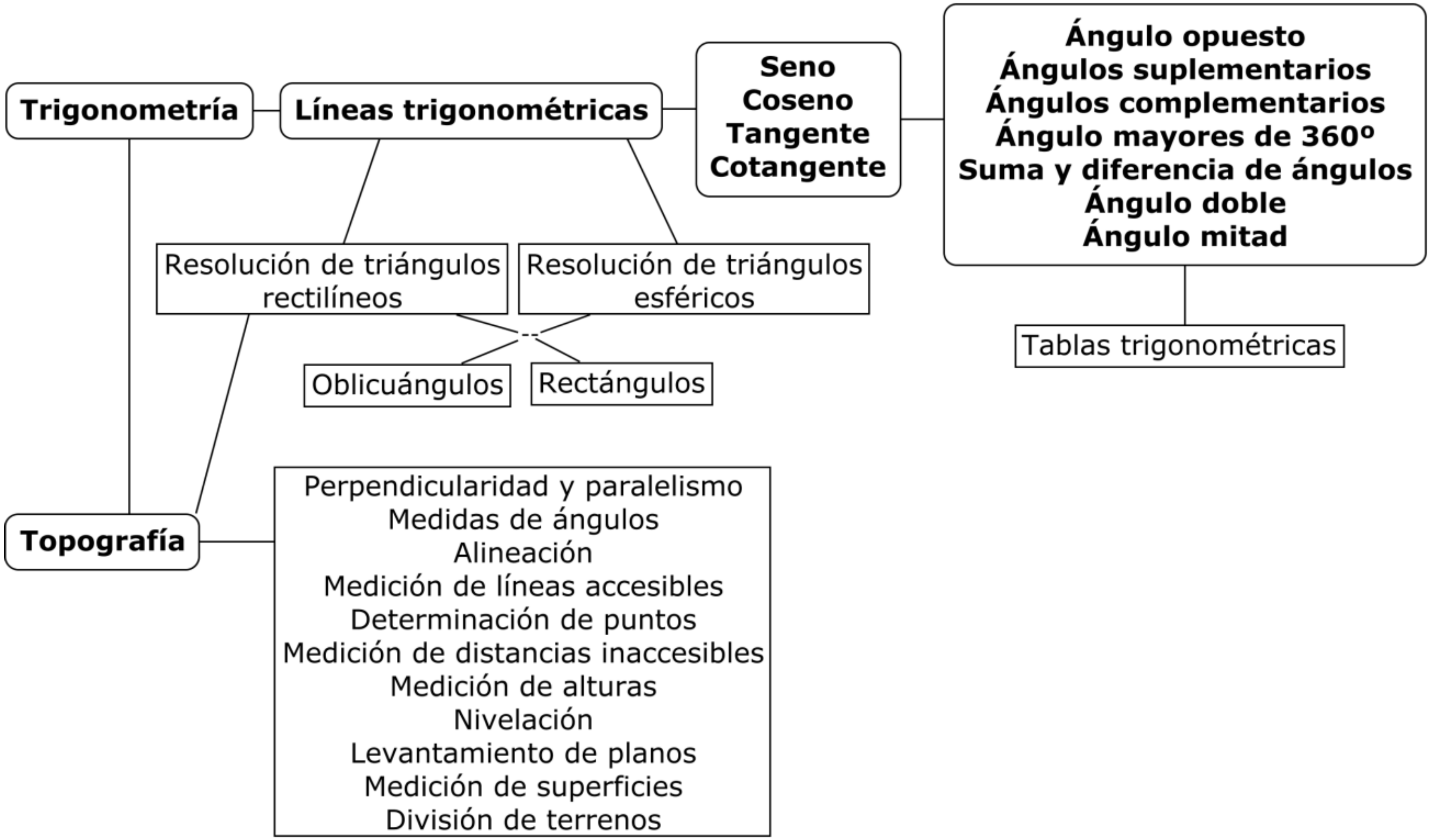


Figura 5-178. Mapa conceptual del *Tratado de Trigonometría rectilínea y esférica y de Topografía* (1848)

Sistemas de representación

Se han localizado cuatro tipos de representaciones en el texto: el lenguaje verbal, las representaciones algebraicas y representaciones gráficas de tipo geométrico y figurales.

- El tipo de representación más abundante es el lenguaje verbal. Un ejemplo de este tipo de representación es: "El nivel de aire es un tubo cilíndrico de cristal algo levantado hácia el medio, cubierto de laton por sus estremos y adherido á una regla rectangular del mismo metal" (p. 105)
- Las representaciones algebraicas se usan frecuentemente para representar las ecuaciones de las líneas trigonométricas o las proporciones que se forman por la semejanza de los triángulos (Figura 5-179), ya sea para demostrar los resultados de los teoremas o resolver ejemplos y problemas propuestos.

2.° *Convertir en producto la suma* sen a+cos b.

Tenemos sen a+cos b=sen a+sen $(90°-b)$; luego, en virtud del primero de estos cuatro teoremas, tendremos

$$\operatorname{sen} a+\operatorname{sen}(90°-b)=2\operatorname{sen}\frac{a+90°-b}{2}\cos\frac{a+b-90°}{2};$$

Figura 5-179. Representación algebraica en el *Tratado de Trigonometría rectilínea y esférica y de Topografía* (Cortázar, 1848, p. 24)

- Por último, en la parte final del tratado se incluyen representaciones gráficas, a las que se hace referencia continuamente. Estas ayudan a ver las construcciones geométricas y los problemas topográficos planteados (Figura 5-180 y Figura 5-181).

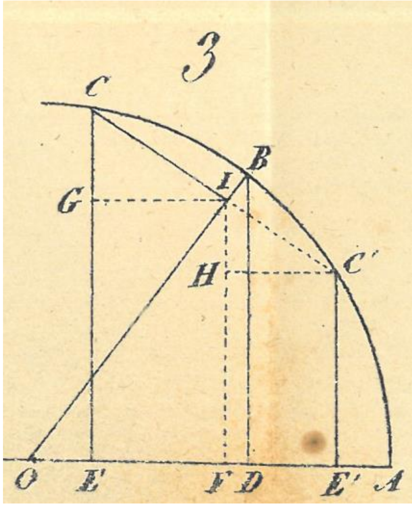


Figura 5-180. Representación geométrica en el *Tratado de Trigonometría rectilínea y esférica y de Topografía* (Cortázar, 1848, lámina I)

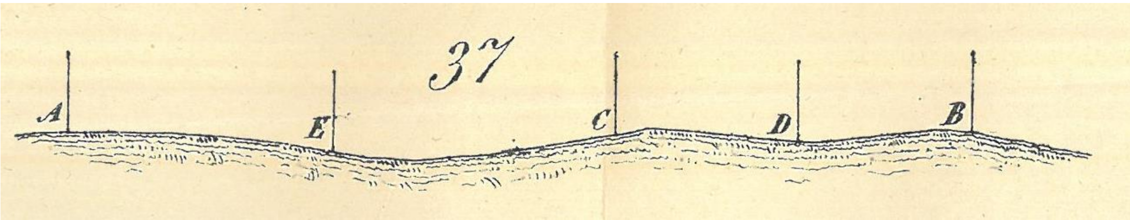


Figura 5-181. Figura en el *Tratado de Trigonometría rectilínea y esférica y de Topografía* (Cortázar, 1848, lámina II)

Fenomenología

Se han encontrado siete tipos de fenómenos o contextos, los fenómenos estrictamente matemáticos de tipo geométrico y fenómenos de agrimensura.

- La primera parte de la obra se desarrolla en un contexto fundamentalmente matemático a la hora de realizar demostraciones, enunciar ejemplos y proponer ejercicios y problemas. Por ello, el fenómeno más usado es el geométrico. Por ejemplo: "Dados dos lados a y b, y el ángulo A opuesto á uno de ellos, resolver el triángulo" (p. 91).
- En la segunda parte, se aplican los resultados teóricos incluidos en la primera parte, al estudio de la Topografía. Por tanto, se hace uso de situaciones o fenómenos que estudian las dimensiones y propiedades de recintos y terrenos, en particular se encuentran de los siguientes tipos:

- Alineaciones: son aquellas situaciones en las que se construyen líneas rectas que alinean dos puntos del terreno. Por ejemplo, "Dados dos puntos en el terreno, prolongar la alineacion determinada por ellos" (p. 115).
- Distancias: son aquellas situaciones en las que se debe calcular la distancia entre dos puntos del terreno, sea este accesible o no. Por ejemplo, "Medir una distancia accesible por un estremo é inaccesible por el otro" (p. 121).
- Alturas: son aquellas situaciones en las que se debe calcular la altura de un punto del terreno, sea este accesible o no. Por ejemplo, "Medir una altura cuyo pie es inaccesible, siendo horizontal el terreno" (p. 125).
- Nivelaciones: son aquellas situaciones en las que se debe calcular la diferencia de nivel entre dos puntos de la horizontal. Por ejemplo,

  > Sean A y B los dos puntos cuya diferencia de nivel se quiere hallar, y supongamos que su distancia horizontal no pase de 600 varas. Colóquese el nivel hacia el medio C […] y la mira en A; fíjese la plancha de la mira de modo que la visual na pase por su centro, y mídase la altura ó acotación Aa. (p. 131)

- Levantamiento de planos: son aquellas situaciones en las que se realiza el dibujo de un terreno en un plano a cierta escala. "Para levantar el plano de un terreno, se recorre el terreno, plantando alones en los puntos que se quieran trasladar al plano, si en ellos no hay señales naturales, como árboles, casas, etc., y se forma un croquis ó bosquejo del plano" (p. 133)
- Medición de áreas: son aquellas situaciones en las que mide la superficie que ocupa un terreno, sea accesible o no, esté nivelado o no. Por ejemplo, "Hallar el área de un terreno, en el cual no se puede penetrar" (p. 140).

Estrategias didácticas

Al igual que las demás obras del autor, el *Tratado de Trigonometría rectilínea y esférica y de Topografía* es una obra versátil, de la que, como el mismo Cortázar señala en la advertencia inicial, podía separarse el estudio de la Trigonometría del de la Topografía, ya que este último se trata de un estudio de Agrimensura complementario al *Tratado de Geometría Elemental*.

Ambas partes del tratado están escritas con el orden y la precisión que caracterizan a Cortázar. Sin embargo, el lenguaje formal usado en el resto de tratados, incluida la primera parte de este, es abandonado en la segunda, para dar paso a un lenguaje coloquial, en el que se obvian las demostraciones de los teoremas y resultados, y a las aplicaciones prácticas de las construcciones de Geometría elemental y resultados trigonométricos (RP).

Análogamente al *Tratado de Geometría Elemental*, el *Tratado de Trigonometría y Topografía* incluye, en la parte final de la obra, láminas desplegables con representaciones gráficas, a las cuales se hace referencia cuando la resolución de algún problema o demostración requiere de apoyo (RG).

Cortázar fue fiel defensor de la simplificación de las teorías y métodos de resolución siempre que en la teoría o en la práctica fuera raro tener necesidad de ellos, para así evitar a los alumnos la dificultad de retener teoremas o resultados superfluos y poder facilitar el estudio de la asignatura. Es el caso, por ejemplo, del estudio de las secantes y cosecantes, que pueden reducirse al estudio del seno o el coseno (SCO).

De nuevo, encontramos numerosas estrategias y consejos, que ayudan al lector, a simplificar cálculos y razonamientos (SPM):

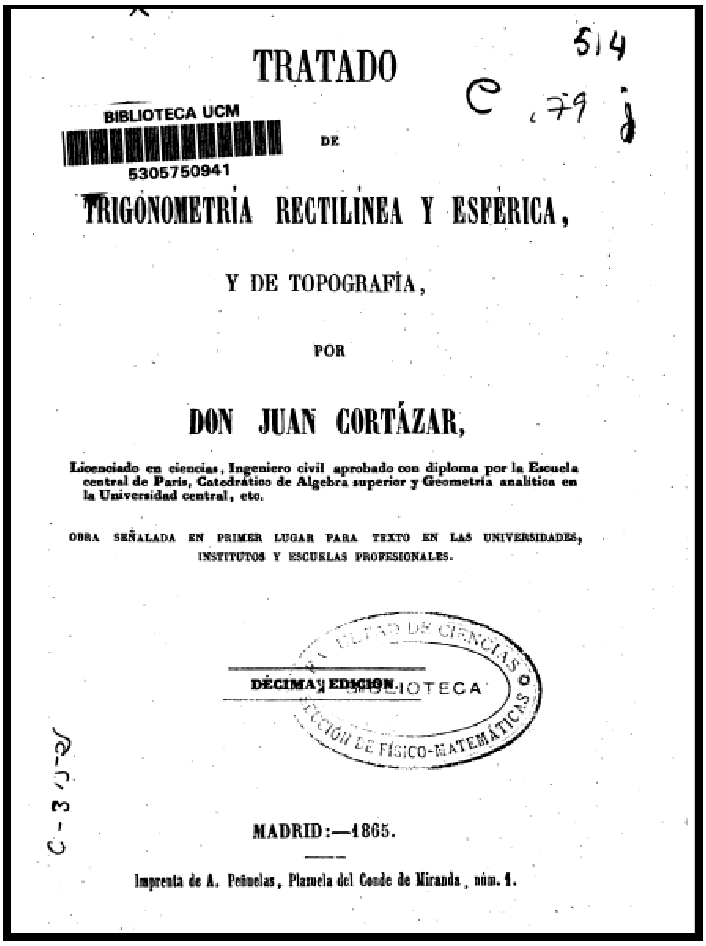
> NOTA. Obsérvese que el mayor valor absoluto del seno ó coseno es el radio, y el menor es cero; y que, dada una cantidad positiva, menor que el radio, existe en el primer cuadrante un arco que tiene por seno á dicha cantidad, y otro que tiene por coseno á la misma. Que el mayor valor absoluto de la tangente ó cotangente es ∞, y el menor es cero; y que, dada una cantidad positiva cualquiera, existe en el primer cuadrante un arco que tiene por tangente á dicha cantidad, y otro que tiene por cotangente á la misma. (pp. 8-9)

Por otro lado, el uso de métodos de resolución que se apoyan en materiales manipulativos, es constante en la segunda parte del tratado. Se usan cadenillas, escuadra y cartabón, cuerdas, grafómetros, brújulas o planchetas como herramientas que ayudan a resolver un mismo problema de varias formas diferentes (MM).

5.7.2.2. Periodo 3 (1857-1873): Décima edición

La décima edición de la obra fue impresa en el año 1865 en Madrid por la Imprenta de A. Peñuelas (CE2 y CE3). El ejemplar analizado se encuentra en la Biblioteca de la Universidad Complutense de Madrid y ha sido localiza a través del repositorio digital Google Books (CE4).

En su portada aparece que se trataba de una “Obra señalada en primer lugar para texto en las Universidades, Institutos y Escuelas Profesionales” (CE6).



TRATADO

DE

TRIGONOMETRÍA RECTILÍNEA Y ESFÉRICA,

Y DE TOPOGRAFÍA,

POR

DON JUAN CORTÁZAR,

Licenciado en ciencias, Ingeniero civil aprobado con diploma por la Escuela central de París, Catedrático de Algebra superior y Geometría analítica en la Universidad central, etc.

OBRA SEÑALADA EN PRIMER LUGAR PARA TEXTO EN LAS UNIVERSIDADES, INSTITUTOS Y ESCUELAS PROFESIONALES.

DÉCIMA EDICION.

MADRID:—1865.

Imprenta de A. Peñuelas, Plazuela del Conde de Miranda, núm. 1.

Figura 5-182. Portada del *Tratado de Trigonometría rectilínea y esférica y de Topografía* (Cortázar, 1865)

Cortázar comenta en el prólogo de la edición, las razones que le llevaron a incorporar mejoras con respecto a obras contemporáneas y, aprovecha la ocasión para compartir con los lectores una anécdota que prueba el alto nivel de conocimientos adquiridos durante su estancia en París. En 1858, mientras escribía un tratado de trigonometría que nunca llegó a publicarse, descubrió las fórmulas de las analogías que Delambre publicó en 1807, pero que ningún autor conocido, las había incluido en sus textos. Por otro lado, la demostración que Cortázar realizó en 1847, de las analogías de Neper (Cortázar, 1847), le ayudaron a volver a deducirlas más fácilmente que cuando lo hizo en 1838. Por tanto, Cortázar decidió enviar las fórmulas y su demostración de las analogías de Neper a Mr. Terquem, director del periódico *Nouvelles annales de mathématiques*. Sin embargo, este solo publicó la demostración de las analogías de Neper, ya que, por lo que más tarde anunció, había sido otro el autor de las fórmulas (CE6).

El número de páginas aumenta a 196, con respecto a la primera edición, pues añade un apartado más titulado *Complemento de la Trigonometría*, alcanzando un total de 32 capítulos (CE5).

Algunos resultados y problemas son señalados con el símbolo asterisco, aunque en contraposición con la mayoría de ediciones de la obra de Cortázar, no se especifica su significado (CE8).

Además de las referencias que aparecen en la primera edición, en la obra se cita el método del geómetra inglés Simpson y su método para construir tablas trigonométricas (CE7).

Estructura conceptual

Los cambios introducidos a las reediciones del *Tratado de Trigonometría rectilínea y esférica y de Topografía*, amplían los contenidos matemáticos que se incluyen en la primera edición. En general, se incluyen las soluciones de los ejercicios que en la primera edición solo contienen indicaciones para ser resueltos y, en los ejercicios se sistematizan los ejemplos para tener en cuenta todos los casos a los que se puede enfrentar el lector.

El libro primero, que contiene el estudio de las líneas trigonométricas, se amplía con el estudio de las razones trigonométricas de ángulos negativos, ángulos que se diferencian en un número entero de vueltas, ángulo mitad, la relación entre las razones trigonométricas de ángulos complementarios y suplementarios, así como las expresiones entre el producto y la suma o resta de las razones trigonométricas de los tres ángulos de un triángulo. Por otro lado, se incluye un método más breve para la construcción de las tablas trigonométricas de Simpson.

La décima edición incluye asimismo una cuarta parte titulada *Complemento de la Trigonometría* que recoge la mayoría de los contenidos matemáticos que aparecían en la primera edición del *Tratado de Álgebra superior* y que fueron eliminados en la segunda para evitar coincidencias con el *Tratado de Trigonometría*.

La primera parte estudia el cálculo de cantidades imaginarias. Para ello, se expone y demuestra la fórmula de Moivre (Figura 5-183) y las equivalencias que existen entre las diferentes expresiones de las cantidades imaginarias.

$$\left(\cos a + \sqrt{-1}\ \mathrm{sen}\, a\right)^m = \cos ma + \sqrt{-1}\ \mathrm{sen}\, ma$$

Figura 5-183. Fórmula de Moivre en el *Tratado de Trigonometría rectilínea y esférica y de Topografía* (Cortázar, 1865, p. 156)

A continuación, se detalla y aportan ejemplos del método de resolución trigonométrica de las ecuaciones binomias y trinomias. Se establecen los casos:

- El segundo miembro es un número real, $x^m = A$.
- El segundo miembro es un número imaginario, $x^m = a + b\sqrt{-1}$ y $x^m = a - b\sqrt{-1}$.

Los siguientes capítulos presentan las expresiones que relacionan las razones trigonométricas de los múltiplos de un ángulo en función de las razones de dicho ángulo, los valores de los límites $\frac{sen\ a}{a}$ y $\frac{tg\ a}{a}$ cuando a tiene a cero y los valores de $senx$ y $cosx$ en función de x.

Los dos últimos capítulos amplían la teoría de resolución de triángulos. En primer lugar, se deducen las fórmulas de los triángulos rectángulos en función de las respectivas fórmulas de los triángulos esféricos. Por último, se recogen los métodos de resolución de triángulos en los casos en los que los datos conocidos son una combinación de los elementos de dichos triángulos. Los ejemplos que se aportan son:

- Para triángulos rectángulos:
  - Conocida la hipotenusa y la suma o diferencia de los valores de los catetos.
  - Conocido uno de los catetos y la suma o diferencia de los valores de la hipotenusa y el otro cateto.
  - Conocidos el perímetro y el área del triángulo.
  - Conocidas las sumas $a^2 + b^2$ y $a^2 + c^2$, siendo a, b y c la hipotenusa y los catetos respectivamente.
  - Conocidos dos lados y la diferencia entre los ángulos correspondientes a dichos lados.
  - Conocidos los ángulos y el perímetro del triángulo.
  - Conocidos el perímetro, el área y uno de los ángulos.

- Para triángulos esféricos rectángulos:
  - Conocida la hipotenusa y la suma de los catetos.
  - Conocido uno de los catetos y el valor de la suma del otro cateto y la hipotenusa.
  - Conocido un ángulo oblicuo y el valor de la suma de la hipotenusa y el cateto correspondiente.
  - Conocida la hipotenusa y la suma de los ángulos oblicuos.
  - Conocidos los valores de las sumas de los dos catetos y los ángulos correspondientes a ambos catetos.
  - Conocidos dos lados y la suma de los ángulos correspondientes a ambos lados.
  - Conocido un lado, su ángulo correspondiente y la suma de los otros dos lados.
  - Conocido un lado, su ángulo adyacente y la suma de los otros dos lados.

Sistemas de representación

La edición no presenta cambios con respecto a los sistemas de representación.

Fenomenología

A pesar de la inclusión de contenidos matemáticos y con ello, ejemplos y problemas resueltos, la edición no presenta cambios con respecto a la fenomenología.

Estrategias didácticas

Además de las estrategias incluidas en la primera edición de la obra, en esta edición destaca el prólogo de la edición, en el que se realiza la justificación sobre la supresión de contenidos poco útiles, innecesarios o ya incluidos en otros de sus tratados, a pesar de ser parte de que en la época eran incluidos en obras escritas por otros autores de libros de texto (SCO).

Conclusiones

El análisis del *Tratado de Trigonometría rectilínea y esférica y de Topografía* revela el marcado carácter didáctico que al igual que la *Memoria del cálculo de interés*, se evidencia a través de las propuestas de diversas estrategias que fomentan el aprendizaje de conocimientos matemáticos de gran utilidad en la vida cotidiana de los lectores.

La primera parte del tratado, que corresponde al estudio de la Trigonometría, difiere con respecto al lenguaje coloquial usado en la segunda parte, dedicada al estudio de la Topografía. En ese mismo sentido, el uso de representaciones gráficas de tipo geométrico destaca en la primera parte, mientras que en la segunda parte destaca la riqueza en el uso de imágenes que facilitan al lector la comprensión de los conceptos incluidos.

5.8. Obra: *Memoria sobre el cálculo del interés*

5.8.1. Caracterización de la obra

De la obra *Memoria sobre el cálculo de interés* (CO1) fue publicada una única edición en 1843 (CO2, CO3 y CO4). Tal y como aparece señalado en el prólogo, esta obra no se encontraba dirigida a la población académica en particular, sino que tenía como objetivo, divulgar entre todos los ciudadanos las reglas que rigen el cálculo de intereses, incluidos aquellos que no conocían las leyes del Álgebra (CO5).

La obra fue alabada por el canónigo Alberto Lista y Aragón en un escrito autógrafo en 1844 (López de Azcona, González y Ruíz, 1992). Por otro lado, Irueste (1912), en su análisis de la obra, destaca la demostración, realizada por primera vez, de la no proporcionalidad del interés del dinero con respecto al tiempo y, por tanto, de que la fórmula del interés compuesto debe ser la fórmula general para todas las operaciones de este tipo (CO6).

5.8.2. Caracterización de la edición

5.8.2.1. Periodo 1 (1838-1845): Edición única

La obra fue impresa en Madrid en 1843 en la Imprenta y fundición de Aguado (CE2 y CE3). El ejemplar está digitalizado por el repositorio Google Books y puede encontrarse en la Biblioteca nacional de España (CE4).

Consta de 27 páginas, dedicadas a demostrar el siguiente conjunto de hipótesis (CE5):

- que el interés simple, conocido entonces como el interés proporcional al tiempo, se trataba de una concepción errónea,
- que los contratos estaban siendo mal redactados cuando se trataba del pago de obligaciones con intereses en diferentes plazos del año,
- que el descuento de las letras es más ventajoso para el tomador según el plazo de la letra y,
- que los dos tipos de contratos usuales para los descuentos aportan la misma cantidad a descontar.

Es una obra que usa un lenguaje formal pero asequible a los lectores familiarizados con los conceptos de interés y descuentos. Está constituida por numerosos contraejemplos, que prueban las hipótesis anteriores, y resultados que ayudan a realizar los cálculos de intereses y descuentos de manera correcta, tanto aritmética como algebraicamente (CE5).

Entre las referencias a otros autores, en el texto se cita únicamente a Newton y su método para calcular algebraicamente la expresión $(1+r)^p$ (CE7).


MEMORIA

SOBRE

EL CÁLCULO DEL INTERÉS

POR

DON JUAN CORTÁZAR,

Catedrático de Matemáticas en la Universidad de Madrid.

Madrid:

IMPRENTA Y FUNDICION DE D. EUSEBIO AGUADO.

1843.

Figura 5-184. Portada de la *Memoria sobre el cálculo del interés* (Cortázar, 1843)

Estructura conceptual

Aunque una de las hipótesis de las que parte la memoria, es que el concepto de interés simple es erróneo, para que los lectores familiarizados con este concepto puedan seguir el contenido de la obra, se admite el concepto de interés simple en el mismo sentido que se había estado empleando, es decir, "proporcional al tiempo; que por tanto, para hallar dicho interés se debía formar esta proporcion: *El año: tiempo menor que el año : : interés en un año : interés en el tiempo*" (p. 5) (CCCI1). Aporta un contraejemplo para demostrar que es falso que "el interés que produce un capital en un tiempo menor que un año es simple" (p. 5) (CCCI1).

La primera parte de la memoria está dedicada a hallar "lo que vale al fin de un tiempo cualquiera un capital puesto a interés" (p. 8) (CCCI1). En primer lugar, define la notación a usar, es decir, define: "Sea c el capital, r el tanto por 1 al año, $\frac{p}{q}$ el tiempo, siendo unidad el año, y *p, q* dos números enteros y positivos cualesquiera; y sea *C* el valor del capital *c* al cabo de este tiempo" (p. 8) (CCCI1). Posteriormente deduce el valor de capital en función de las variables anteriores (Figura 5-185) (CCCI1).

$$C = c(1+r)^{\frac{p}{q}}$$

Figura 5-185. Fórmula para el cálculo del valor del capital en la *Memoria sobre el cálculo del interés* (Cortázar, 1843, p. 8)

Continúa con la inversa de la cuestión anterior, es decir, el cálculo de descuentos. Define descuento como "la diferencia entre el valor futuro ó nominal de la letra y su valor actual" (p. 11) (CCCI2). Inmediatamente, explica los dos métodos usuales para convenir los descuentos. El primero consiste en "convenir explícitamente que el dinero que entrega el tomador al tenedor en pago de la letra, produzca un cierto tanto p% al año". (p. 11) (CCCI2), de lo cual se deduce la fórmula para calcular el valor actual de la letra, conocidos el tanto por 1 de interés al año, el valor nominal de la letra y el plazo de dicha letra (Figura 5-186) (CCCI2).

$$c = \frac{C}{(1+r)^t}$$

Figura 5-186. Fórmula para el cálculo del valor actual de una letra en la *Memoria sobre el cálculo del interés* (Cortázar, 1843, p. 12)

El segundo caso, "consiste en rebajar de cada 100 unidades del valor futuro de la letra una cierta cantidad por un año de anticipación" (p. 14) (CCCI2). Análogamente al caso anterior, deduce la fórmula para calcular el valor actual de la letra (Figura 5-187) (CCCI2).

$$c = C\,(1 - r)^t$$

Figura 5-187. Fórmula para el cálculo del valor actual de una letra desde otro convenio en la *Memoria sobre el cálculo del interés* (Cortázar, 1843, p. 7)

La última parte de la memoria está dedicada a demostrar algebraicamente todos los métodos anteriores que solo habían sido demostrados aritméticamente.

Los resultados anteriores se complementan con varios ejemplos, que podemos clasificar en dos tipos:

- De interés. Aquellos en los que “dado el valor actual de un capital y el tanto p % de interés al año, hallar el valor de dicho capital, pasado cierto tiempo” (p. 11). Por ejemplo: “Hallar el interés de 1 real en 3 meses á 4 p.% al año.” (p. 9) (CCCI1).
- De descuentos. Aquellos en los que “dado el valor de una letra pasado cierto tiempo, y el tanto p % de interés al año, hallar su valor actual” (p. 11). Por ejemplo: “Hallar el valor actual de una letra de 20000 reales que vencerá dentro de 6 meses, siendo 6 el tanto p.% de interés al año.” (p. 12) (CCCI2).

Presentamos un mapa conceptual (Figura 5-188) del contenido de la edición en el que se muestran los contenidos estudiados.

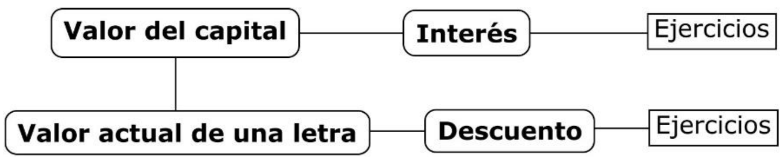


Figura 5-188. Mapa conceptual de la *Memoria sobre el cálculo del interés* (1843)

Sistemas de representación

Se han localizado tres tipos de representaciones en el texto: el lenguaje verbal, las representaciones algebraicas y las representaciones numéricas.

- El tipo de representación más abundante es el lenguaje verbal. Se usan las palabras para definir conceptos, enunciar propiedades y resultados, realizar demostraciones, proponer ejemplos, ejercicios y problemas. Las demostraciones de propiedades y resultados se realizan a través del lenguaje verbal, aunque apoyadas en expresiones simbólicas y numéricas: "Lo primero que demostraremos es que el interés en un tiempo menor que un año es menor que el interés simple, y mayor en un tiempo mayor que un año" (p. 23).

- Las representaciones algebraicas combinan números con signos y letras. Se usan frecuentemente para expresar expresiones algebraicas y ecuaciones con el objetivo de dar claridad a las propiedades, realizar demostraciones y dar ejemplos.

$$(1+r)^p = 1 + pr + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} r^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} r^3 + \ldots\ldots + r^p,$$

Figura 5-189. Representación algebraica en la *Memoria sobre el cálculo del interés* (Cortázar, 1843, p. 24)

- Para dar ejemplos mediante números y símbolos, se usan representaciones numéricas: "103 : 100 : : 20000 : 19417 rs. 16 mrs." (p. 13).

Fenomenología

La obra se desarrolla en un contexto fundamentalmente económico, en particular encontramos fenómenos financieros: "Hallar el valor actual de una letra de 20000rs. Que vence á los seis meses, siendo 6 el tanto de descuento." (p. 17).

Estrategias didácticas

El interés didáctico de la memoria se evidencia en su finalidad; demostrar a los lectores, importantes resultados sobre los intereses que genera un capital que eran desconocidos o los errores que se cometían al redactar los contratos de descuentos de letras. Además, el autor es consciente de que todos los lectores interesados en leer la memoria no tienen por qué tener conocimientos de álgebra, con lo que demuestra todos los resultados tanto aritmética como algebraicamente (APL).

> En lo que hasta ahora llevamos dicho hemos evitado en lo posible el cálculo algébrico con objeto de que nos entendiesen aun aquellas personas de cortos conocimientos en el álgebra. Mas ya se sabe que el cálculo algébrico simplifica los razonamientos, y facilita por tanto la resolución de los problemas y demostracion de los teoremas matemáticos.

> Por eso vamos actualmente á demostrar por medio de dicho cálculo las verdades que sin su ausilio dejamos demostradas. (p. 22)

Por otro lado, propone diversas estrategias para facilitar tanto el cálculo del interés como el valor actual de una letra (SMP).

> En la práctica se pudiera facilitar el cálculo de la fórmula $c = \frac{C}{(1+r)^t}$, que es bastante complicado, por medio de tablas que diesen el valor actual, siendo 1 real el valor nominal, pasado un tiempo cualquiera; pues entonces una simple multiplicación de este valor actual por el valor nominal de la letra daría su valor actual. (p. 13)

Conclusiones

Sin abandonar la rigurosidad del lenguaje matemático y la estructura formal propia de su obra, Cortázar plasma en este escrito su voluntad de ayudar a todas aquellas personas que, sin tener conocimientos algebraicos, quieran conocer las reglas del interés del dinero, sin ser engañados y sin cometer errores al redactar los contratos de este tipo de operaciones financieras.

El *Tratado de Trigonometría y Topografía* y la *Memoria sobre el cálculo de interés* constituyen la parte de su obra que contienen más aplicaciones prácticas a problemas que pueden darse en la vida cotidiana de toda persona. A través de ellas se puede observar el interés de Cortázar por divulgar conocimientos matemáticos a tantas personas como sea posible.

Destacan los numerosos ejemplos de situaciones particulares que la obra incluye, así como las sugerencias y estrategias que ayudan a resolver los cálculos. El análisis de contenido centrado en la fenomenología, muestra el uso exclusivo de situaciones de tipo financiero en la redacción de ejercicios y problemas.

Con respecto a los sistemas de representación que la obra incluye, acorde al objetivo de Cortázar de mostrar el cálculo de interés sin tener conocimientos algebraicos previos, predomina el lenguaje verbal y numérico. No obstante, al finalizar la memoria, se incluye una nota con las todas demostraciones algebraicas, por tanto, aunque en menor medida también aparecen representaciones algebraicas.

6. DISCUSIÓN DE RESULTADOS Y CONCLUSIONES

En este último capítulo, se presentan las conclusiones finales de la investigación, obtenidas a través de la discusión de los resultados del análisis de las obras publicadas de Cortázar expuestos en el Capítulo 5, respecto a los aspectos matemáticos y didácticos elegidos y respecto a las mejoras introducidas en las obras a lo largo de sus numerosas reediciones.

Se recoge también el grado de consecución de los objetivos fijados en el Capítulo 3, las limitaciones que la investigación presenta, así como las líneas futuras de trabajo que esta deja abiertas.

6.1. Relevancia de la producción académica de Juan Cortázar

Como se puso en evidencia en el Capítulo 3, existen numerosos indicadores que ameritan a la producción de Cortázar como la más difundida e influyente en las matemáticas escolares en España durante la segunda mitad del siglo XIX.

Con respecto a los contenidos, se trata de una de las publicaciones matemáticas con fines docentes más completas del siglo XIX, junto a la de José Mariano Vallejo (1779-1846), que solo hubiera sido mejorada, si Cortázar hubiera podido publicar los apuntes sobre *Cálculo infinitesimal, Mecánica racional, Cosmografía y Lógica matemática* que dejó inéditos.

Entre los indicadores que muestran la calidad e influencia de las obras, se encuentran las numerosas reediciones de sus textos, que llegaron al medio millón de ejemplares vendidos, tanto de las publicaciones oficiales impresas en Madrid, como las que fueron impresas sin su consentimiento en ciudades tan importantes como París o Nueva York. Las obras contaron con el consentimiento y aprobación del gobierno, que la incluyó en la corta lista de libros de texto oficial para uso en Universidades, Institutos, Escuelas Profesionales y Escuelas Superiores.

De entre las valoraciones dadas por otros autores sobre las obras, destacan la actualidad de los contenidos con respecto a autores españoles contemporáneos, su buen nivel matemático tanto para los alumnos de la segunda enseñanza como universitaria y sus evidentes influencias de los planes de estudios franceses, debidas a sus años de estudio de ingeniería en París (Peset et al.,1978; Vea, 1995; Vea y Velamazán, 2011)

Una característica común en toda su producción es el rigor y la formalidad de su lenguaje. A pesar de que en la *Aritmética práctica para uso de las Escuelas Primarias* abandona la precisión del lenguaje matemático y no incluye las demostraciones de los teoremas porque está dirigida a alumnos de la primera enseñanza y en la *Memoria para el cálculo del interés* prioriza las demostraciones aritméticas, porque su objetivo es formar a todas aquellas personas que no conocen el lenguaje algebraico, en toda su producción se detecta la claridad de la estructura del lenguaje matemático. Tanto es así, que en el *Tratado de Aritmética* incluye las definiciones más importantes de este, como por ejemplo la definición de lema y teorema, el concepto de axioma, la demostración de un teorema mediante la reducción al absurdo, etc. Tal y como se ha visto en los análisis individuales de cada obra, incluye además una serie de notas que intentan ayudar al lector a una mejor comprensión del tema abordado o a un ahorro en los cálculos mediante el uso de métodos y reglas más breves.

Cortázar hace uso de los prólogos de las diferentes ediciones para exponer los errores contenidos en las obras de otros autores contemporáneos e incluye la manera correcta de enseñarlos. Además, justifica la originalidad de la secuenciación de sus contenidos, indicando no solo que se encuentran en los planes de estudios franceses, sino aportando razones de peso en función de los lectores a los que se encuentran dirigidos los libros de texto.

En su producción, que abarca un amplio número de temas, para todos los ámbitos de las matemáticas y para todas las etapas educativas, tienen cabida obras como la *Memoria para el cálculo del interés*, que tiene como objetivo evitar engaños y fraudes en los contratos de tipo financiero. Otro caso es el del *Tratado de Aritmética*, que incluye un método original que intenta implantar el nuevo sistema métrico decimal, a través de unas reglas sencillas y accesibles para todas las personas.

Se puede observar en los libros de Cortázar, la tendencia que los autores del siglo XVI otorgaban a la adquisición de conocimientos en el ámbito comercial para así evitar la dificultad a la que se enfrentaban las personas a la hora de realizar este tipo de cálculos y las estafas que se cometían a causa de este desconocimiento (Madrid, 2016).

Es evidente que el tamaño de cada obra y los contenidos que se incluyen en ellas, son diferentes según la disciplina de la que traten. Sin embargo, se pueden encontrar pautas comunes que son características de las obras de Cortázar. Todos los textos, excepto la *Aritmética práctica*, contienen un índice ordenado de los contenidos, separado en libros, que reflejan cada una de las partes que se presentan y, estos a su vez, se dividen en capítulos, que organizan todos los temas incluidos. El uso del símbolo asterisco para señalar los apartados y problemas de mayor dificultad, es generalizado en todos los textos. Este hecho hace de ellos, unos libros versátiles, que pueden usarse en diferentes niveles educativos, a conveniencia del maestro o profesor. Sin embargo, en algunas de las ediciones se comete el error de no explicar su significado, lo que puede dar evidencias de que su utilidad era ya sobradamente conocida.

No se han localizado referencias a otros autores que hubieran podido influir en los contenidos o secuenciación de los libros, sin embargo, Cortázar cita tanto a autores clásicos como Eratóstenes, Tolomeo o Pitágoras, cuyos métodos, reglas o teoremas se incluyen en los libros, como a científicos del siglo XVIII o principios del XIX, que realizaron importantes avances en la disciplina, como Chernac, Lalande, Taylor, Lagrange, Sturm o Newton.

6.2. Estructura conceptual

Debido a que las obras de Cortázar abarcan contenidos distintos y están dirigidas a alumnos de diferentes niveles educativos, una adecuada comparación de la estructura conceptual de las obras, ha de tener en cuenta, de acuerdo a las dimensiones propuestas por Schubring (1987), los cambios dados entre las diferentes ediciones de un libro de texto, marcados por el contexto histórico en el que se desarrollan y los cambios que se producen entre obras que se ocupan de campos conceptualmente relacionados.

6.2.1. Cambios entre ediciones a través de los periodos estudiados

Tras realizar el análisis individual de la estructura conceptual de diferentes ediciones de cada obra, publicadas en el seno de los dos planes de estudio principales del siglo XIX, se puede observar que los cambios que sufrieron, no están directamente relacionados con el contexto histórico en el que se publicaron, ni con los múltiples cambios realizados en la legislación educativa de la época, sino con la práctica diaria y mejoras del propio autor, dentro de sus funciones de profesor en ejercicio que fue.

En general, en todas las obras aumenta el número de ejemplos aportados; la mayoría de las definiciones y los enunciados de los problemas ganan detalle y consiguen mayor claridad; pero el cambio más significativo consiste en las aclaraciones realizadas en las demostraciones de teoremas y resultados principales, conseguido, en la mayoría de las ocasiones, al cambiar el lenguaje verbal o representaciones numéricas por representaciones algebraicas, que ayudan a los alumnos a alcanzar una mayor comprensión de los contenidos. Cabe destacar, como caso particular, el abandono del estudio de casos particulares para realizar un estudio más completo del caso general en el *Tratado de Geometría analítica*.

La ampliación o reducción de contenidos, en ediciones posteriores, responde en ambos casos a razones didácticas. La ampliación de contenidos suele ser, en la mayoría de casos, sobre conceptos y resultados previos que faciliten la introducción de la temática a abordar. También es habitual la adicción de capítulos complementarios o láminas con representaciones gráficas, que apoyen las explicaciones del cuerpo de la obra. Como casos excepcionales, destaca la ampliación del concepto de derivada en la segunda edición del *Tratado de Álgebra superior*, gracias al cual, puede ampliarse la resolución de ecuaciones, también para ecuaciones trascendentes y sus aplicaciones teóricas, como el estudio de los máximos y los mínimos de una función. También se amplía el estudio de las razones trigonométricas y la resolución de triángulos en la décima edición del *Tratado de Trigonometría y Topografía*.

Es una práctica usual del autor, reorganizar los contenidos incluidos en la edición anterior buscando integrar en cada capítulo, únicamente los conceptos y resultados que van a ser necesarios, así como los problemas resueltos correspondientes a este, consiguiendo una obra más intuitiva. En el caso del *Álgebra superior* también se eliminan los capítulos sobre la resolución trigonométrica de las ecuaciones, con el objetivo de no duplicar los mismos contenidos en esta y en el *Tratado de Trigonometría y Topografía*.

6.2.2. Cambios entre obras con campos conceptualmente relacionados

Con respecto a los contenidos matemáticos, la producción académica de Cortázar puede englobarse en las obras sobre Aritmética (*Tratado de Aritmética* y *Aritmética práctica para uso de las escuelas primarias*), las obras sobre Álgebra (*Tratado de Álgebra elemental* y *Tratado de Álgebra superior*) y las obras sobre Geometría (*Tratado de Geometría elemental*, *Tratado de Geometría analítica* y *Tratado de Trigonometría*). El *Tratado de Topografía* y la *Memoria del cálculo del interés* no tienen campos conceptuales relacionados, aunque ambas estudian las aplicaciones prácticas de las matemáticas.

6.2.2.1. *Tratado de Aritmética* y *Aritmética práctica*

Debido a que la *Aritmética práctica* tenía como objetivo, la enseñanza de la Aritmética en educación primaria, no se incluyen en ella algunos de los conceptos estudiados en el *Tratado de Aritmética*. Entre ellos se encuentran los conceptos de, potencia, raíz cuadrada y cúbica, mínimo común múltiplo y máximo común divisor, fracción generatriz y sistemas de numeración.

Sin embargo, la diferencia más significativa entre ambos textos, es el uso que Cortázar hace de la secuenciación de los contenidos. Mientras en el *Tratado de Aritmética* se estudia en primer lugar los números abstractos y después los concretos, la *Aritmética práctica* expone el estudio de los números enteros desde el punto de vista de números abstractos y concretos y después, de la misma manera, se estudian los números fraccionarios. De esta forma, Cortázar hace uso del sistema métrico decimal para aumentar el número de ejemplos y así explicar las operaciones fundamentales de los números enteros y fraccionarios como aplicaciones a problemas que pueden surgir en la vida cotidiana.

6.2.2.2. *Tratado de Álgebra elemental* y *Tratado de Álgebra superior*

Con respecto a la estructura conceptual, el *Tratado de Álgebra superior* o *Complemento del Álgebra* es la ampliación del *Tratado de Álgebra elemental*, como su título indica. Los contenidos del Álgebra elemental abarcan los conceptos relacionados con el lenguaje algebraico y sus operaciones fundamentales, así como la resolución de ecuaciones hasta grado dos. Sin embargo, el Álgebra Superior estudia la resolución de ecuaciones de cualquier grado, así como el desarrollo en serie de funciones.

Los tratados destinados a la enseñanza a nivel superior –*Tratado de Álgebra superior* y *Tratado de Geometría analítica* – incluyen contenidos matemáticos de alto nivel con respecto a los tratados elementales, dirigidos a la segunda enseñanza. Por ello, en el *Álgebra superior*, Cortázar elige una exposición de los métodos de resolución que implica estudiar cada paso por separado e intercalar ejemplos resueltos antes de continuar con el paso siguiente. Lo anterior se encuentra en contraposición con la descripción de los métodos en el *Tratado de Álgebra elemental*, en los que, si bien se resuelven un número mayor de ejemplos y problemas, la exposición del método no realiza con tanto detalle.

6.2.2.3. ***Tratado de Geometría elemental*, *Tratado de Geometría analítica* y *Tratado de Trigonometría***

Aunque las tres obras - *Tratado de Geometría elemental*, *Tratado de Geometría analítica* y *Tratado de Trigonometría* – se ocupan del estudio de la Geometría plana y del espacio, el objetivo de estas es diferente. Mientras que el tratado elemental sienta las bases conceptuales de la disciplina y construye geométricamente, con la escuadra, la regla y el compás, todos los resultados de la Geometría, la analítica usa las ecuaciones algebraicas para demostrar los mismos analíticamente y el *Tratado de Trigonometría* estudia la resolución de triángulos mediante las razones trigonométricas.

6.3. Sistemas de representación

El análisis de los sistemas de representación en las obras de Cortázar, revela que las representaciones más abundantes son la verbal y la algebraica. Con la representación verbal, no solo se enuncian conceptos, teoremas, ejercicios y problemas, también se exponen métodos y reglas, así como pequeñas notas plagadas de sugerencias que ayudan al lector a superar algunos de los obstáculos con los que puede encontrarse.

Acompañando al lenguaje verbal, encontramos el simbólico. El lenguaje algebraico aparece en todas las obras, incluso en el *Tratado de Aritmética*, en que el estudio de las proporciones se apoya en las ecuaciones para resolver alguno de sus términos o en la *Memoria sobre el cálculo del interés*, en la que las demostraciones algebraicas afianzan y demuestran los resultados previamente expuestos aritméticamente.

Las obras también usan representaciones numéricas para aportar ejemplos sobre propiedades o en la resolución de ejercicios y problemas, sin embargo, son menos habituales que las representaciones algebraicas, ya que, en las obras de *Geometría analítica* y *Trigonometría y Topografía*, no aparecen. Cabe destacar que, en esta última, la parte dedicada a la Topografía, a pesar de ser una de las más prácticas dentro de los libros de texto escritos por Cortázar, no aparezcan representaciones numéricas. La razón es que la exposición de los métodos se realiza a través de herramientas de medida manipulables - como el jalón, la cadena o la escuadra – y, por tanto, no se incluyen ejemplos particulares de las técnicas.

Con respecto a las representaciones gráficas, su uso es generalizado en todas las obras, excepto la *Memoria del cálculo del interés*, sin embargo, existe mayor variedad en el tipo de representación gráfica usada, según la obra analizada. Únicamente los libros sobre Aritmética usan tablas para ordenar y organizar la información, y las usan exclusivamente para representar las tablas de la adicción, sustracción y multiplicación. Las figuras aparecen solo en el *Tratado de Topografía*, ya que, en él se incluyen dibujos a escala de terrenos, recintos y elevaciones que buscan una representación fiable de la realidad.

Es evidente el uso frecuente de las representaciones gráficas de tipo geométrico en las tres obras de Geometría - *Tratado de Geometría elemental*, *Tratado de Geometría analítica* y *Tratado de Trigonometría*. Cortázar las incluye en láminas finales y las numera para poder hacer referencias a ellas durante el desarrollo de estos textos.

En el *Tratado de Aritmética*, las representaciones gráficas no aparecen en las primeras ediciones de la obra. Cortázar decide añadirlas para poder trabajar problemas sobre medidas cuadradas y cúbicas. Por otro lado, el objetivo de las representaciones gráficas en el *Tratado de Álgebra elemental* es apoyar visualmente la resolución de problemas sobre desplazamientos, mediante líneas rectas que indican la posición de uno o varios móviles.

Por último, es habitual el uso de representaciones sobre notaciones algorítmicas en los tratados de *Aritmética* y *Álgebra elemental*, sobre todo en la exposición de las reglas generales para trabajar las operaciones fundamentales con números y expresiones algebraicas. Pero también son frecuentes al realizar otro tipo de algoritmos, como, por ejemplo, el cálculo del mínimo común múltiplo, de los divisores, de la raíz cuadrada, tanto de números como de expresiones algebraicas.

En conclusión, y a pesar de que Cortázar era un fiel defensor de la formalidad y rigor del lenguaje matemático, incluye en sus obras representaciones diferentes al lenguaje verbal o simbólico, como figuras, tablas o las abundantes representaciones gráficas, de las que es destacable su precisión, teniendo en cuenta el bajo nivel tecnológico de la época.

La Tabla 6-1 muestra los resultados sobre los sistemas de representación hallados en los análisis realizados a las obras de Cortázar en el Capítulo 5.

Tabla 6-1. *Sistemas de representación en las ediciones de las obras analizadas de Juan Cortázar*

	Verbales	Simbólicas		Gráficas			Notaciones algorítmicas
		Algebraicas	Numéricas	Geométricas	Figuras	Tablas	
A 4ª	X	X	X			X	X
A 19ª	X	X	X	X		X	X
AP	X	X	X	X		X	X
AE 2ª	X	X	X	X			X
AE 15ª	X	X	X	X			X
AS 1ª	X	X	X				X
AS 2ª	X	X	X				X
GE 1ª	X	X	X	X			
GE 12ª	X	X	X	X			
GA 1ª	X	X		X			
GA 2ª	X	X		X			
TT 1ª	X	X		X	X		
TT 10ª	X	X		X	X		
CI	X	X	X				

Nota. A= *Tratado de Aritmética*; AP= *Aritmética práctica para uso de las escuelas primarias*; AE= *Tratado de Álgebra elemental*; AS= *Tratado de Álgebra superior*; GE= *Tratado de Geometría elemental*; GA= *Tratado de Geometría analítica*; TT= *Tratado de Trigonometría y Topografía*; CI= *Memoria para el cálculo del interés*.

6.4. Fenomenología

El análisis individual realizado a cada una de las obras de Cortázar, evidencia un importante número de fenómenos o contextos planteados en los ejemplos y problemas propuestos, que abarcan situaciones de tipo natural y físico, situaciones de tipo social y situaciones estrictamente matemáticas.

Cabe destacar que cuanto mayor es el nivel matemático que presenta la obra, menor es el número de situaciones asociadas a ejemplos y problemas. Las obras que estudian Geometría - *Tratado de Geometría elemental*, *Tratado de Geometría analítica* y *Tratado de Trigonometría* – apenas recurren a situaciones de tipo estrictamente matemático, en particular geométrico, para plantear ejemplos y problemas.

No obstante, el *Tratado de Topografía*, contiene fenomenología específica sobre agrimensura, que se encuentra únicamente en las obras dedicadas a esta disciplina. En este mismo sentido, la *Memoria del cálculo del interés* solo contiene contextos de tipo financiero, aunque estos no sean exclusivos de este tipo de libros de texto.

Tabla 6-2. *Fenomenología en las ediciones de las obras analizadas de Juan Cortázar*

			A 4ª	A 19ª	AP	AE 2ª	AE 15ª	AS 1ª	AS 2ª	GE 1ª	GE 12ª	GA 1ª	GA 2ª	TT 1ª	TT 10ª	CI
Naturales y físicos	De medida	Desplazamientos	X	X	X	X	X					X				
		Cronológicos			X	X	X									
		Capacidades	X	X	X	X	X									
		Masa	X	X	X	X	X									
		Longitud			X	X	X									
		Superficie		X	X											
	De agrimensura	Alineaciones												X	X	
		Distancias												X	X	
		Nivelaciones												X	X	
		Levantamiento de planos												X	X	
		Medición de áreas												X	X	
Sociales		Poblacionales			X	X	X									
		Laborales	X	X	X	X	X									
		Financieros	X	X	X	X	X									X
		Comerciales	X	X	X	X	X		X							
		Lúdicos				X	X									
		Transmisión		X	X	X	X									
De equivalencia entre medidas			X	X	X				X							
Matemáticos		Aritméticos	X	X	X	X	X	X	X							
		Algebraicos	X	X		X	X	X	X							
		Geométricos		X	X				X	X	X	X	X	X	X	

Nota. A= *Tratado de Aritmética*; AP= *Aritmética práctica para uso de las escuelas primarias*; AE= *Tratado de Álgebra elemental*; AS= *Tratado de Álgebra superior*; GE= *Tratado de Geometría elemental*; GA= *Tratado de Geometría analítica*; TT= *Tratado de Trigonometría y Topografía*; CI= *Memoria para el cálculo del interés*.

La Tabla 6-2 muestra un resumen de los resultados obtenidos con respecto a la fenomenología de todas las obras. En ella se aprecia cómo los tratados sobre Aritmética y Álgebra presentan gran variedad de situaciones asociadas, en su mayor parte, a las operaciones fundamentales con números y expresiones algebraicas. Los contextos naturales, físicos y sociales son propicios para plantear problemas que pueden presentarse en la vida cotidiana y así, ayudar al lector a afianzar los contenidos de la disciplina.

Debido a su carácter, las obras de Aritmética y Álgebra, usan con frecuencia los fenómenos aritméticos y algebraicos, sin embargo y, debido al público al que iba dirigida, que solo debía aprender las cuatro operaciones fundamentales de los números, la *Aritmética práctica para uso de las escuelas primarias*, no hace uso de las representaciones algebraicas ni geométricas.

Es evidente que los fenómenos de equivalencias entre medidas y monedas, se concentran en los dos *Tratados de Aritmética*, - *Tratado de Aritmética* y *Aritmética práctica para uso de las escuelas primarias* - ya que en ellos se presentan los contenidos sobre el sistema métrico decimal y sus equivalencias con las medidas y monedas españolas más habituales de la época, clasificadas por provincias.

Las situaciones o contextos lúdicos que usan el desarrollo de un juego para averiguar el ganador o calcular el premio de este, resultan también muy útiles para plantear problemas de ecuaciones o sistemas de ecuaciones de primer o segundo grado, por ello se encuentran en varias ocasiones en el *Tratado de Álgebra elemental*.

En conclusión, y debido a que la producción de Cortázar abarca la mayoría de disciplinas matemáticas, los tipos de fenómenos y contextos son diversos y pertenecen a diferentes áreas de conocimiento, en particular, natural o físico, social y estrictamente matemático. Por otro lado, el uso de algunos de ellos, es característico en las obras con mayor aplicabilidad a problemas de la vida real, como son el *Tratado de Topografía* y la *Memoria del cálculo del interés*.

6.5. Estrategias didácticas

Una de las características más especiales de Cortázar como autor, es el rigor y la precisión de sus obras, incluso en las que no incluye demostraciones o expresiones algebraicas y a las que, es capaz de transmitir la formalidad del razonamiento matemático.

Por ello, todas sus obras se ciñen al orden y a la estructura distintiva del lenguaje matemático, formado por definiciones, axiomas, teoremas, demostraciones, corolarios y notas.

Cortázar se vale de los prólogos de las ediciones para justificar la secuenciación de los contenidos incluidos en sus obras. En ellos, critica justificadamente los errores cometidos en algunos contenidos de las obras de autores contemporáneos, y señala cómo estos deben enunciarse y demostrarse matemáticamente. Sin embargo, en los tratados de *Aritmética* y *Álgebra superior*, esta justificación no se incluye en las primeras ediciones publicadas, hay que esperar a las ediciones analizadas durante el tercer periodo de estudio para encontrarlas.

En cuanto al uso de materiales manipulativos, se definen y se detalla cómo y para qué se usan, en el *Tratado de Geometría elemental*, el *Tratado de Geometría analítica* y el *Tratado de Topografía*. En los dos primeros tratados aparece la escuadra, la regla, el compás o el transportador de ángulos como el material necesario para realizar construcciones geométricas. Sin embargo, en el *Tratado de Topografía*, los materiales incluidos son los usados en las técnicas de agrimensura, como son la cuerda, los jalones, escuadra o cartabón de agrimensor, etc.

A pesar de la actualización de los materiales manipulables usados, Cortázar continúa la tendencia de algunos autores del siglo XVI, que defendían su uso para que el lector comprendiera mejor los contenidos (Madrid, 2016).

Los *Tratados de Álgebra superior*, *Geometría elemental* y *Geometría analítica* no incluyen aplicaciones que no sean estrictamente matemáticas, debido a que se trata de obras en su totalidad teóricas. Sin embargo, en los tratados elementales, se evidencia el interés que muestra Cortázar por temas sociales como aquellos que son aplicables a la vida real, financieros, militares o en la práctica de la agrimensura.

Las representaciones gráficas, tan habituales en los tratados de Cortázar, tienen un doble objetivo en cuanto a su intencionalidad didáctica. En los tratados más elementales – *Aritmética y Álgebra elemental* – se presentan como acompañamiento visual en los enunciados de problemas, de tal forma que el lector pueda entender mejor cuáles son los datos aportados y cuáles son las preguntas planteadas en ellos. Sin embargo, su función en los tratados que estudian la Geometría - *Geometría elemental*, *Geometría analítica* y *Trigonometría y Topografía* – es la de ayudar a entender cada uno de los pasos de las demostraciones y resolución de ejercicios planteados en ellos.

Asimismo, todas las obras contienen, tras las exposiciones de las reglas o métodos de cálculo y resolución o en notas a pie de página, consejos y sugerencias que advierten al lector sobre algunas de las dificultades a las que puede enfrentarse cuando esté aplicando el método y cómo salvarlas; o enseña a aplicarlo en un número menor de pasos; o resuelve un mismo ejercicio de dos maneras distintas y anima al lector a decidir la mejor manera de llevarlo a cabo.

En definitiva, todos estos indicadores no hacen sino demostrar el interés didáctico de Cortázar por formar y educar a sus lectores, que en algunos casos eran sus propios alumnos, con todas las herramientas que tiene a su disposición, aportando propuestas y sugerencias, creando su propia secuenciación de contenidos y justificando esta al lector, explicando y usando diversos materiales manipulativos e incluyendo aplicaciones, no solo matemáticas, sino aquellas que pueden surgir en la vida real.

La Tabla 6-3 esquematiza los indicadores sobre estrategias didácticas hallados en las obras analizadas.

Tabla 6-3. *Estrategias didácticas en las ediciones de las obras analizadas de Juan Cortázar*

	RP	RG	SPM	SCO	MM	APL
A 4ª	X		X			Matemáticas y de la vida cotidiana
A 19ª	X	X	X	X		Matemáticas y de la vida cotidiana
AP	X	X	X	X		Matemáticas y de la vida cotidiana
AE 2ª	X	X	X	X		Matemáticas y de la vida cotidiana
AE 15 ª	X	X	X	X		Matemáticas y de la vida cotidiana
AS 1ª	X		X			Matemáticas
AS 2ª	X		X	X		Matemáticas
GE 1ª	X	X	X	X	X	Matemáticas
GE 12ª	X	X	X	X	X	Matemáticas
GA 1ª	X	X	X	X	X	Matemáticas
GA 2ª	X	X	X	X	X	Matemáticas
TT 1ª	X	X	X	X	X	Matemáticas y de agrimensura
TT 10ª	X	X	X	X	X	Matemáticas y de agrimensura
CI	X		X	X		Matemáticas y financieras

Nota. A= *Tratado de Aritmética*; AP= *Aritmética práctica para uso de las escuelas primarias*; AE= *Tratado de Álgebra elemental*; AS= *Tratado de Álgebra superior*; GE= *Tratado de Geometría elemental*; GA= *Tratado de Geometría analítica*; TT= *Tratado de Trigonometría y Topografía*; CI= *Memoria para el cálculo del interés*.

6.6. Nivel de logro y alcance de los objetivos planteados

A continuación, se presentan un análisis comparativo entre las conclusiones obtenidas y los objetivos planteados al inicio de esta investigación. Asimismo, se analiza en qué medida han sido alcanzados dichos objetivos.

El objetivo general de esta investigación consistía en contextualizar la vida y la totalidad de la obra del autor del siglo XIX Juan Cortázar desde el punto de vista de la Didáctica de las matemáticas y relacionarlas con el contexto histórico en la que se desarrolla. Para ello, se plantearon los siguientes objetivos específicos:

O1: Realizar un análisis de contenido de cada libro, con el fin de caracterizar qué se enseña y cómo se enseña.

Este objetivo ha sido ampliamente desarrollado en el Capítulo 5, mediante el uso de las categorías definidas en los apartados 3.3.3. y 3.3.4. y a través de un análisis de contenido de las ocho obras que fueron publicadas por Juan Cortázar. En este análisis se ha descrito – y representado en un mapa conceptual - la estructura conceptual, los sistemas de representación, los fenómenos y estrategias didácticas usadas en cada una de las obras.

Los contenidos incluidos en las obras cubren todas las etapas educativas, desde la educación primaria hasta la universitaria y técnica, de la segunda mitad del siglo XIX en España e incluso, dirigen su atención a aquellas personas que, sin conocer el lenguaje algebraico, están interesadas en temas financieros.

Así, el *Tratado de Aritmética* contiene las operaciones y propiedades de los números abstractos, tanto de los números enteros como de los fraccionarios, la divisibilidad de los números enteros y las aplicaciones prácticas de los números concretos, entre ellas, los problemas sobre proporcionalidad. *La Aritmética práctica para uso de las Escuelas Primarias* contiene asimismo las operaciones y propiedades de los números enteros, quebrados, cantidades decimales, la divisibilidad de los números enteros, el estudio de los números complejos e incomplejos y el estudio de las proporciones.

Las obras dedicadas al estudio del Álgebra estudian el lenguaje algebraico y la resolución de ecuaciones. Así, el *Tratado de Álgebra elemental* contiene el estudio de los números negativos y sus operaciones, las expresiones algebraicas y sus operaciones, la resolución de ecuaciones y los problemas asociados a ellas, el cálculo de logaritmos y el cálculo de progresiones y problemas sobre ellas. El *Tratado de Álgebra superior* continúa con la resolución de ecuaciones polinómicas de grado igual o mayor a tres, tanto por el método general, como para los casos particulares de las ecuaciones recíprocas o las ecuaciones binomias y trinomias, las ecuaciones trascendentes y el desarrollo en series de las funciones racionales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas.

Las obras dedicadas al estudio de la Geometría estudian los elementos y propiedades de la geometría plana y espacial. Así, la *Geometría elemental* demuestra sus construcciones con herramientas de dibujo; la *Geometría analítica* los construye y demuestra con expresiones algebraicas; y el *Tratado de Trigonometría* resuelve lo ejercicios sobre triángulos mediante las razones trigonométricas.

En cuanto a las obras con mayor aplicación práctica, el *Tratado de Topografía* estudia los problemas asociados a la agrimensura a través de los diferentes instrumentos de medida y la *Memoria sobre el cálculo del interés* estudia los problemas sobre el interés generado por un capital y los contratos sobre descuentos de letras.

Con respecto a la presencia de sistemas de representación en las obras de Cortázar, el lenguaje verbal y el algebraico constituyen la base para todas las obras y la menos frecuentes son las notaciones algorítmicas. El uso de las representaciones numéricas y gráficas también es habitual, pero su presencia depende del grado de aplicabilidad de cada texto.

Por último, el análisis de contenido centrado en los fenómenos y contextos nos muestra un uso amplio y variado; abarcan situaciones que ocurren en la naturaleza y se rigen mediante leyes de la física, situaciones que se dan en las relaciones sociales hasta situaciones estrictamente matemáticas. Es destacable el interés de Cortázar por mostrar situaciones que se asocian a problemas que pueden surgir en la vida real o que tienen una importante aplicabilidad, como las asociadas a problemas sobre agrimensura.

O2: <u>Realizar un análisis de la actividad didáctica de cada obra con el fin de caracterizar las ideas latentes y las estrategias que podemos encontrar.</u>

Tras el análisis comparado de las estrategias didácticas utilizadas en las obras, el rigor y la precisión, el aporte de sugerencias propuestas metodológicas, su propia secuenciación de contenidos y la relación de los contenidos teóricos con su aplicación a la vida cotidiana, son características que muestra la relevancia didáctica que posee la producción de Cortázar.

Los análisis realizados en el Capítulo 5, mediante el uso de las categorías definidas en el apartado 3.3.5, han permitido alcanzar el objetivo planteado.

O3: <u>Realizar un análisis del planteamiento de las obras, indicando las distintas etapas por las que transcurre</u>.

A través de los análisis realizados en el Capítulo 5, y mediante el análisis de los cambios sufridos en los libros de texto a través de los periodos definidos en el apartado 3.1.2, se han obtenido las conclusiones de los apartados 6.2., 6.3., 6.4. y 6.5. sobre la evolución de cada obra, que responden a la consecución del objetivo planteado.

De las anteriores conclusiones se deduce la diversidad de contenidos que incluye, ya que abarca todas las disciplinas del currículo escolar de la época; la versatilidad de su producción, ya que abraza las diferentes etapas educativas; su rigurosidad; ya que en ella predomina la formalidad del lenguaje matemático y la preocupación por ofrecer al lector un texto matemático de alta calidad; y la evidente intencionalidad didáctica, que se refleja a través de la amplia gama de sistemas de representación, fenomenologías y propuestas metodológicas usadas en ella.

Asimismo, como se señaló anteriormente, los cambios que todas las obras sufrieron a lo largo de las diferentes ediciones, no responden a las múltiples leyes de instrucción pública, promulgadas y derogadas de la época, sino que son el resultado de las mejoras surgidas de las experiencias vividas en el ejercicio de su profesión.

O4: <u>Realizar un análisis de los contenidos matemáticos incluidos en el currículo de la época</u>.

En el apartado 4.2., se analiza la organización científica y educativa de las Matemáticas en España, con respecto a sus tres niveles escolares, primera, segunda y universitaria, durante los tres primeros cuartos del siglo XIX. Todo ello garantiza el logro en la consecución de este objetivo.

Este nos muestra la evolución que sufren los contenidos matemáticos en el currículo escolar a través de las diferentes legislaciones implantadas durante la época. El cultivo de las Matemáticas, que a principios de siglo se concentraba en instituciones ajenas a la Universidad, como sociedades, seminarios y academias, se establece de forma progresiva en Escuelas de instrucción primaria, en los que se estudiaba Aritmética y nociones de Geometría; en Institutos de segunda enseñanza, en los que se estudiaba elementos de Aritmética, Álgebra hasta las ecuaciones de segundo grado, Geometría elemental, Trigonometría y Topografía; y en la Universidad, en la que se estudiaba Álgebra, Geometría elemental y analítica, Geometría descriptiva, Trigonometría y Cálculo diferencial e integral.

O5: <u>Contextualizar la figura de Juan Cortázar social, histórica y académicamente</u>.

Teniendo en cuenta, los dispares niveles económicos, sociales y académicos de la época, Cortázar formó parte de los miembros de la burguesía que tuvieron acceso a los estudios ofertados en las Escuelas de Latinidad e Idiomas, tan necesarios para poder optar a los estudios universitarios.

Asimismo, fue uno de los beneficiarios de las políticas liberales bajo el reinado de Isabel II, quien reabrió las Universidades y becó a los alumnos para que pudieran realizar sus estudios en París cuando se suspendieron las clases por la epidemia de cólera. Por ello, Cortázar tuvo la oportunidad de diplomarse como Ingeniero de puentes y caminos en la Escuela Central de Artes y Manufacturas de París.

A su vuelta a España, se incorpora como profesor en la Facultad de Filosofía y es nombrado Catedrático de Matemáticas elementales, para dar respuesta a la incorporación de estudios de segunda enseñanza en los Institutos españoles.

Del mismo modo, la implantación del Plan Pidal ofrece a sus obras elementales la oportunidad de formar parte de las listas oficiales de libros de texto para la Universidades, Institutos y Escuelas Profesionales, a él a licenciarse en ciencias Físico-Matemáticas y ser nombrado Catedrático de Álgebra superior y Geometría analítica y, por tanto, a sus obras superiores a formar parte de las listas oficiales para Facultades, Escuelas Superiores y Profesionales.

Este objetivo ha sido desarrollado en el Capítulo 4, mediante la contextualización histórica, social, científica y educativa de la época en la que vivió el autor, así como de la semblanza biográfica de su vida. Por ello se considera que el objetivo planteado ha sido alcanzado.

Por tanto, la consecución de los objetivos específicos descritos, nos ha permitido contextualizar la vida y producción académica del autor del siglo XIX Juan Cortázar desde el punto de vista de la Didáctica de las matemáticas y relacionarlas con el contexto histórico en la que se desarrolla, que supone la consecución del objetivo general planteado en esta investigación.

6.7. Aportaciones de esta investigación

Los resultados obtenidos en esta investigación, permiten conocer qué y cómo se enseña en los libros de texto del autor que probablemente más influencia tuvo en la difusión de las matemáticas escolares en España y en la formación matemática de los estudiantes españoles de la segunda mitad del siglo XIX.

Se trata del primer análisis completo de la totalidad de la obra de Juan Cortázar, que incluye una descripción completa de la estructura conceptual, de los sistemas de representación, de la fenomenología y de las estrategias didácticas incluidas en esta, además de una semblanza biográfica del autor.

El análisis de los textos se ha llevado a cabo mediante la metodología de investigación validada y aplicada en las investigaciones de Maz (2005), Picado (2012), J. I. López (2011), Sánchez (2015) o Madrid (2016). Para ello se han creado las categorías de la estructura conceptual de todas las disciplinas que abarca la producción y se han ampliado los tipos de fenómenos y estrategias didácticas incluidas en las obras.

Esta investigación, al igual que las citadas anteriormente, consolidan una línea de investigación perteneciente al campo de estudio de la Historia de las matemáticas y la Educación matemática centrada en personajes relevantes que son autores de libros de texto, que estudia su vida histórica, social y académicamente y sus aportes desde el punto de vista matemático y didáctico.

6.8. Limitaciones de esta investigación

Durante el desarrollo de esta investigación surgieron algunas limitaciones que dificultaron y ralentizaron el proceso de recogida de datos y análisis de las obras. Las principales dificultades fueron:

- En ninguna de las obras analizadas, se han encontrado referencias a otros autores u otras influencias, en los que el autor hubiera podido basarse. Si bien el propio Cortázar indica en alguna ocasión, que sigue, en sus textos, los planes de estudios franceses, no conocemos el autor o autores que tomó como referencia para la elaboración de sus tratados.

- Existe importante documentación que ha sido imposible localizar o no estaba disponible su consulta. Así, solo ha sido posible localizar la primera edición de la *Aritmética Práctica para uso de las escuelas primarias*, imposibilitando el análisis de los cambios producidos en el siguiente periodo de estudio; y ha sido imposible localizar los apuntes inéditos de *Cálculo infinitesimal*, de *Mecánica racional*, *Cosmografía* y *Lógica Matemática*, impidiendo su análisis e inclusión en la investigación.
- Debido a que algunos de los estudios señalados en la tabla 2-1, que han incluido obras de Cortázar, no comparten con esta, la misma metodología de investigación, no han podido integrarse sus resultados, dejando sin estudiar algunos aspectos importantes de las obras.

6.9. Líneas de investigación para futuros trabajos

Tras la finalización de esta investigación, surgen nuevos temas de estudio que pueden resultar de interés como futuras líneas de trabajo. Entre ellas, destacan las siguientes:

- La localización y análisis de las obras inéditas del autor (*Cálculo infinitesimal*, *Mecánica racional*, *Cosmografía* y *Lógica Matemática*) y su integración con la presente investigación, ofrecerían un estudio integral de la figura de Juan Cortázar.
- La localización y análisis de las obras del autor o autores en los que Cortázar hubiera podido basarse, permitiría determinar el grado de influencia en su producción.
- El análisis de las ediciones de las obras con respecto a los cambios introducidos por el hijo de Cortázar, Daniel Cortázar, permitiría conocer la evolución que sufrieron las obras hasta el primer cuarto del siglo XX.
- La metodología de análisis usada en esta investigación permitiría analizar la figura y la producción matemática con fines escolares de cualquier autor.
- El análisis comparado de las obras de Cortázar con las de otros autores de libros de textos contemporáneos, como los de Zoel García de Galdeano o José Echegaray, permitiría determinar la actualidad y originalidad de estas.
-

7. DISCUSSION OF RESULTS AND CONCLUSIONS

In this last chapter, we present the final conclusions of the research, obtained through the results of the analysis of the published works of Cortázar exposed in the Chapter 5 regarding the chosen mathematical and didactic aspects and with respect to the improvements introduced in the works throughout its numerous editions.

The degree of achievement of the objectives set in the Chapter 3 is also collected, as well as the limitations that the research presents and the future lines of work that it leaves opened.

7.1. Relevance of the academic production of Juan Cortázar

As it was pointed out in the Chapter 3, there are numerous indicators that merit the production of Cortázar as the most widespread and influential in school mathematics in Spain during the second half of the XIX century.

With regard to content, this is one of the most complete mathematical publications for teaching purposes of the XIX century, along with that of José Mariano Vallejo (1779-1846), which would have only been improved if Cortázar could have published the notes on *Infinitesimal Calculus*, *Rational Mechanics*, *Cosmography* and *Mathematical Logic* that he left unpublished.

Among the indicators that show the quality and influence of the works, are the numerous re editions of his texts, which reached half a million copies sold, both of official publications printed in Madrid and those that were printed without his consent in important cities as Paris or New York. The works had the consent and approval of the government, which included it in the short list of official textbooks for use in Universities, Secondary Schools, Professional Schools and Higher Schools.

Among the evaluations given by other authors on the works, they emphasize the actuality of the contents with respect to contemporary Spanish authors, the good mathematical level both for second teaching as university students and its evident influences of the French curricula, due to his years of engineering studies in Paris (Peset et al., 1978, Vea, 1995, Vea and Velamazán, 2011)

A common characteristic in all of its production is the exactitude and formality of its language. Although in *Practical Arithmetic for the use of Primary Schools*, he abandons the precision of mathematical language and does not include the proofs of theorems because it is addressed to students of the first teaching and in *Memory for the calculation of interest* prioritizes the arithmetic demonstrations, because his objective is to train all those people who don't know the algebraic language, the clarity of the structure of the mathematical language is detected in all his work. So much so, that in the *Treatise on Arithmetic* he includes its most important definitions, as for example the definition of lemma and theorem, the concept of axiom, the demonstration of a theorem by reduction to absurd, and so on. As it has been seen in the individual analyzes of each work, he also includes a series of notes that try to help the reader to a better understanding of the subject addressed or to a saving in the calculations by means of the use of methods and shorter rules.

Cortázar uses the prologues of the different editions to expose the errors contained in the works of other contemporary authors and includes the correct way of teaching them. In addition, he justifies the originality of the sequencing of the contents, indicating not only that they are found in French curricula, but also providing important reasons for the readers to whom the textbooks are addressed.

In his production, which covers a wide range of subjects, for all mathematics areas and for all educational stages, there have room works such as the *Memory for the calculation of interest*, which aims to avoid deception and fraud in the contracts of financial type. Another case is the *Treatise on Arithmetic*, which includes an original method that attempts to implement the new decimal metric system, through simple rules and accessible to all people.

It can be observed in Cortázar's books the tendency that the authors of the XVI century gave to the acquisition of knowledge in the commercial field in order to avoid the difficulty that people faced when making this type of calculations and the scams that were committed because of this ignorance (Madrid, 2016).

It is evident that the size of each work and the contents that are included in them are different according to the discipline of which they treat. However, common guidelines can be found that are characteristic of Cortázar's works. All texts, except *Practical*

Arithmetic, contain an ordered index of the contents, separated in books, which show each of the parts that are presented and these are divided into chapters at the same time, which organize all the topics included. It is generalized in all the texts the use of the asterisk symbol to indicate the sections and problems of greater difficulty. This fact makes versatile books of them, that can be used in different educative levels, to the convenience of the teacher or professor. However, in some of the editions there is an error that is not explain its meaning, which may give evidence that its utility was already well known.

No references have been found about other authors who could have influenced the contents or sequencing of the books, however, Cortázar quotes both classical authors such as Eratosthenes, Ptolemy or Pythagoras, whose methods, rules or theorems are included in his books, as scientists of the eighteenth or early XIX century, who made important advances in the discipline, such as Chernac, Lalande, Taylor, Lagrange, Sturm or Newton.

7.2. Conceptual structure

Due to Cortázar's works cover different contents and are aimed at students of different educational levels, an adequate comparison of the conceptual structure of the works must take into account, according to the dimensions proposed by Schubring (1987), the changes between different editions of a textbook, set by the historical context in which they are developed and the changes that occur between works that deal with conceptually related fields.

7.2.1. Changes between editions across the studied periods

After carrying out the individual analysis of the conceptual structure of different editions of each work, published in the two main curricula of the XIX century, it can be observed that the changes they suffered are not directly related to the historical context in which they were published, neither to the multiple changes made in the educational legislation of the time, but to the daily practice and improvements of the author himself, within his functions as teacher that he was.

In general, in all the works increases the number of examples contributed; most definitions and problem statements gain detail and become clearer; but the most significant change consists of the explanations made in the proofs of theorems and main results, obtained, in most cases, by changing the verbal language or numerical representations by algebraic ones, which help students to reach a greater understanding of the contents. To highlight, particularly, it is the abandonment of the study of particular cases to carry out a more complete study of the general case in the *Treatise on Analytical Geometry*.

The increase or reduction of content, in later editions, responds in both cases to didactic reasons. The increase of content is usually, in most cases, about concepts and previous results that facilitate the introduction of the subject to be addressed. It is also usual to add complementary chapters or pictures with graphic representations, which support the body's explanations of the work. As exceptional cases, the extension of the concept of derivative in the second edition of the *Treatise on Advanced Algebra* stands out, thanks to which the resolution of equations can be extended, also for transcendent equations and their theoretical applications, such as the study of maximum and minimum of a function. The study of trigonometric ratios and the resolution of triangles in the tenth edition of the *Treatise on Trigonometry and Topography* is also extended.

It is a regular practice of the author to reorganize the contents included in the previous edition, seeking to integrate in each chapter only the concepts and results that are going to be necessary, as well as the solved problems corresponding to this one, achieving a more intuitive work. In the case of *Advanced Algebra*, the chapters on the trigonometric resolution of the equations are also eliminated, in order not to duplicate the same contents in this and in the Treatise on *Trigonometry and Topography*.

7.2.2. Changes among works with conceptually related fields

Regarding to mathematical contents, Cortázar's academic production can be included in works on Arithmetic (*Arithmetic and Practical Arithmetic for the use in Primary School*s), works on Algebra (*Treatise on Elemental Algebra and Treatise on Advanced Algebra*) and the works on Geometry (*Treatise on Elemental Geometry*, *Treatise on Analytical Geometry and Treatise on Trigonometr*y). The *Treatise on Topography* and *Memory for the calculation of interest* don't have related conceptual fields, although both study the practical applications of mathematics.

7.2.2.1. *Treatise on Arithmetic* and *Practical Arithmetic for the use in Primary School*

Due to *Practical Arithmetic* aimed at teaching arithmetic in primary education, some of the concepts discussed in the *Treatise on Arithmetic* are not included in it. Among them, there are the concepts of power, square and cubic root, minimum common multiple and maximum common divisor, generatrix fraction and numbering systems.

However, the most significant difference between the two texts is Cortázar's use of content sequencing. Whereas in the *Treatise on Arithmetic* the abstract numbers are studied before the concrete ones, *Practical Arithmetic* exposes the study of whole numbers from the point of view of abstract and concrete numbers, and then, in the same way, fractional numbers are studied. In this way, Cortázar uses the decimal metric system to increase the number of examples and thus explain the fundamental operations of integers and fractions as applications to problems that can arise in daily life.

7.2.2.2. *Treatise on Elemental Algebra* and *Treatise on Advanced Algebra*

Regarding to the conceptual structure, the *Treatise on Advanced Algebra* or *Complement of Algebra* is the extension of the *Treatise on Elemental Algebra,* as its title indicates. The contents of elementary algebra encompass concepts related to algebraic language and its fundamental operations, as well as the resolution of equations up to grade two. However, *Advanced Algebra* studies the resolution of equations of any degree, as well as the serial development of functions.

Treatises for higher education - *Treatise on Advanced Algebr*a and the *Treatise on Analytical Geometry* - include high-level mathematical content with respect to elementary treatises, addressed to secondary education. Therefore, in *Advanced Algebra*, Cortázar chooses an exposition of the methods of resolution that involves studying each step separately and interleaving solved examples before proceeding to the next step. The above is in contrast to the description of the methods in the *Treatise on Elemental Algebra*, in which, although a greater number of examples and problems are solved, the exposition of the method is not performed in such detail.

7.2.2.3. *Treatise on Elemental Geometry, Treatise on Analytical Geometry* and *Treatise on Trigonometry*

Although the three works - *Treatise on Elemental Geometry, Treatise on Analytical Geometry* and *Treatise on Trigonometry* - deal with the study of flat geometry and space, they have a different purpose. While the elemental treatise sets the conceptual bases of the discipline and constructs geometrically, with the square, the ruler and the compass, all the results of Geometry, the analytic uses the algebraic equations to demonstrate analytically the same and the *Treatise on Trigonometry* studies the resolution of triangles by trigonometric ratios.

7.3. Representations

The analysis of the representation in Cortázar's works reveals that the most abundant representations are the verbal and the algebraic ones. With the verbal representation, not only concepts but theorems, exercises and problems are stated, methods and rules are also exposed, as well as small notes plagued with suggestions that help the reader to overcome some of the obstacles that could appear.

Accompanying the verbal language, we find the symbolic one. Algebraic language appears in all works, even in the *Treatise on Arithmetic*, in which the study of proportions is based on equations to solve one of its terms or in the *Memory for the calculation of interest*, in which algebraic demonstrations consolidate and demonstrate the results arithmetically previously presented.

The works also use numerical representations to provide examples on properties or in the resolution of exercises and problems, however, they are less common than algebraic representations, since they don't appear in the works of *Analytical Geometry* and *Trigonometry and Topography*. It should be noted that, in the last one, the part dedicated to Topography, despite being one of the most practical within textbooks written by Cortázar, numerical representations don't appear. The reason is that the exposure of the methods is done through manipulable measuring tools - such as the surveying rod, the string or the set square - and, therefore, no particular examples of the techniques are included.

Regarding graphic representations, its use is generalized in all works, except the *Memory for the calculation of interest*, however, there is a greater variety in the type of graphic representation used, according to the analyzed work. Only Arithmetic books use tables to sort and organize information, and use them exclusively to represent the tables of addition, subtraction and multiplication. The figures appear only in the *Treatise on Topography,* since it includes drawings to scale of grounds, enclosures and elevations that look for a reliable representation of reality.

It is evident the frequent use of graphical representations of geometric type in the three works of Geometry - *Treatise on Elementary Geometry, Treatise on Analytical Geometry* and *Treatise on Trigonometry*. Cortazar includes them in final sheets and numbers them to be able to make references to them during the development of these texts.

In the *Treatise on Arithmetic*, the graphic representations don't appear in the first editions of the work. Cortázar decides to add them to work with problems on square and cubic measures. On the other hand, the purpose of graphical representations in the *Treatise on Elemental Algebra* is to visually support the resolution of problems on displacements, by straight lines that indicate the position of one or several mobiles.

Finally, it is usual the use of representations on algorithmic notations in *Arithmetic* and *Elemental Algebra* treatises, especially in exposing the general rules for working on fundamental operations with numbers and algebraic expressions. But they are also frequent in performing other algorithms, such as calculating the least common multiple, divisors, square root, both for numbers and algebraic expressions.

In conclusion, and even though Cortázar was a faithful defender of the formality and exactitude of mathematical language, he includes representations different from verbal or symbolic language in his works, such as figures, tables or abundant graphic representations, of which their precision is remarkable taking into account the low technological level of the time.

Table 7-1 shows the results on the representation systems found in the analyzes performed on Cortázar's works in Chapter 5.

Table 7-1. *Representations in the editions of the works by Juan Cortázar analyzed*

	Verbals	Symbolic		Grafics			Algorithmic notation
		Algebraic	Numerical	Geometric	Figures	Tables	
A 4ª	X	X	X			X	X
A 19ª	X	X	X	X		X	X
AP	X	X	X	X		X	X
AE 2ª	X	X	X	X			X
AE 15ª	X	X	X	X			X
AS 1ª	X	X	X				X
AS 2ª	X	X	X				X
GE 1ª	X	X	X	X			
GE 12ª	X	X	X	X			
GA 1ª	X	X		X			
GA 2ª	X	X		X			
TT 1ª	X	X		X	X		
TT 10ª	X	X		X	X		
CI	X	X	X				

Note. A = *Treatise on Arithmetic*; AP = *Practical Arithmetic for the use in Primary Schools*; AE = *Treatise on Elemental Algebra*; AS = *Treatise on Advanced Algebra*; GE = *Treatise on Elemental Geometry*; GA = *Treatise on Analytical Geometry*; TT = *Trigonometry and Topography*; CI = *Memory for the calculation of interest*

7.4. Phenomenology

The individual analysis carried out on each of Cortázar's works shows a significant number of phenomena or contexts raised in the examples and problems proposed, which include natural and physical, social and strictly mathematical situations.

However, the Topography Treatise contains specific phenomenology about surveying, which is only found in works dedicated to this discipline. In this same sense, the *Memory for the calculation of interest* contains only financial contexts, although these are not exclusive to this type of textbook.

Table 7-2. *Phenomenology in the editions of the works by Juan Cortázar analyzed*

			A 4ª	A 19ª	AP	AE 2ª	AE 15ª	AS 1ª	AS 2ª	GE 1ª	GE 12ª	GA 1ª	GA 2ª	TT 1ª	TT 10ª	CI
Natural and physical	Of measurement	Displacements	X	X	X	X	X					X				
		Chronological			X	X	X									
		Capacitances	X	X	X	X	X									
		Mass	X	X	X	X	X									
		Length			X	X	X									
		Area		X	X											
	Of surveying	Alignment												X	X	
		Distances												X	X	
		Levelling												X	X	
		Building surveyors												X	X	
		Measuring areas												X	X	
Social		Population			X	X	X									
		Occupational	X	X	X	X	X									
		Financial	X	X	X	X	X									X
		Commercial	X	X	X	X	X		X							
		Ludics				X	X									
		Transmission		X	X	X	X									
Of equivalence between measures			X	X	X				X							
Mathematical		Arithmetic	X	X	X	X	X	X	X							
		Algebraic	X	X		X	X	X	X							
		Geometrics		X	X				X	X	X	X	X	X	X	

Note. A = *Treatise on Arithmetic*; AP = *Practical Arithmetic for the use in Primary Schools*; AE = *Treatise on Elemental Algebra*; AS = *Treatise on Advanced Algebra*; GE = *Treatise on Elemental Geometry*; GA = *Treatise on Analytical Geometry*; TT = *Trigonometry and Topography*; CI = *Memory for the calculation of interest*

Table *7-2* shows a summary of the results obtained with respect to the phenomenology of all works. It shows how the treatises on Arithmetic and Algebra present a great variety of situations associated, mainly, with fundamental operations with numbers and algebraic expressions. The natural, physical and social contexts are propitious to pose problems that can arise in daily life and thus help the reader to strengthen the contents of the discipline.

Due to their character, the works of Arithmetic and Algebra frequently use the arithmetic and algebraic phenomena, however, and due to the public to which it was addressed, that it only had to learn the four fundamental operations of numbers, *Practical Arithmetic for the use of Primary Schools* doesn't make use of algebraic or geometric representations.

It is evident that the equivalence phenomena between measures and currencies are concentrated in both *Arithmetic's Treatises, - Treatise on Arithmetic* and *Practical Arithmetic for the use of Primary Schools* - since in them are presented the contents on decimal metric system and its equivalences with the most usual Spanish measures and coins of the time, classified by provinces.

The ludic situations or contexts that use the development of a game to find out the winner or calculate the prize of this, are also very useful to pose problems of equations or systems of equations of first or second degree, so they are shown several times in the *Treatise on Elemental Algebra*.

In conclusion, and because Cortázar's production encompasses most mathematical disciplines, the types of phenomena and contexts are diverse and belong to different areas of knowledge, in particular, natural or physical, social and strictly mathematical. On the other hand, the use of some of them, is characteristic in the works with greater applicability to problems of the real life, such as the *Treatise on Topography and the Memory of the calculation of interest*.

7.5. Didactic strategies

One of the most special features of Cortázar as an author is the rigor and precision of his works, even in those that don't include demonstrations or algebraic expressions and to which he is able to transmit the formality of mathematical reasoning. For this reason, all his works fit the order and the distinctive structure of mathematical language, consisting of definitions, axioms, theorems, demonstrations, corollaries and notes.

Cortázar uses the prologues of the editions to justify the sequencing of the contents included in his works. In them, he justifiably criticizes the errors committed in some of contemporary authors' works, and points out how they have to be mathematically stated and demonstrated. However, in the *Arithmetic* and *Advanced Algebra* treatises, this justification is not included in the first published editions, it is necessary to wait for the analyzed editions during the third study period to find them.

As for the use of manipulative materials, it is defined and detailed how and for what they are used, in the *Treatise on Elementary Geometry*, the *Treatise on Analytical Geometry* and the *Treatise on Topography*. In the first two treatises appears the set-square, the ruler, the compass or the angle conveyor as the necessary material to make geometric constructions. However, in the *Treatise on Topography*, the materials included are those used in surveying techniques, such as the rope, surveying rod, set-square or surveyor's set-square, etc.

Despite of the manipulable materials used updating, Cortázar continues the tendency of some authors of the XVI century, who defended its use so that the reader could understand the contents better (Madrid, 2016).

The *Treatises on Advanced Algebra*, *Elemental Geometry* and *Analytical Geometry* don't include applications that are not strictly mathematical since they are entirely theoretical works. However, in elementary treatises, Cortázar's interest in social issues such as those applicable to real life, financial, military or in the practice of surveying is evident.

The graphic representations, so usual in Cortázar's treatises, have a double objective in their didactic intention. In the most elementary treatises - *Arithmetic* and *Elemental Algebra* - they are presented as visual accompaniment in problem statements, so that the reader can understand better what data are provided and what questions are posed in them. However, its function in treatises that study Geometry - *Elemental Geometry*, *Analytical Geometry* and *Trigonometry and Topography* - is to help understand each of the steps of the demonstrations and resolution of exercises posed in them.

In addition, all works contain, after expositions of rules or methods of calculation and resolution or footnotes, tips and suggestions that warn the reader about some of the difficulties that may be encountered when applying the method and how to solve them; or he teaches to apply it in a reduced number of steps; or he resolves the same exercise in two different ways and encourages the reader to decide the best way to do it.

In short, all these indicators only demonstrate Cortázar's didactic interest in training and educating his readers, who in some cases were his own students, with all the tools he has at his disposal, contributing with proposals and suggestions, creating his own sequencing of contents and justifying this to the reader, explaining and using various manipulative materials and including applications, not only mathematics, but those that can arise in real life.

Table *7-3* outlines the indicators on didactic strategies found in the analyzed works.

Table 7-3. *Didactic strategies in the editions of the analyzed works by Juan Cortázar*

	RP	RG	SPM	SCO	MM	APL
A 4ª	X		X			Mathematics and everyday life
A 19ª	X	X	X	X		Mathematics and everyday life
AP	X	X	X	X		Mathematics and everyday life
AE 2ª	X	X	X	X		Mathematics and everyday life
AE 15 ª	X	X	X	X		Mathematics and everyday life
AS 1ª	X		X			Mathematics
AS 2ª	X		X	X		Mathematics
GE 1ª	X	X	X	X	X	Mathematics
GE 12ª	X	X	X	X	X	Mathematics
GA 1ª	X	X	X	X	X	Mathematics
GA 2ª	X	X	X	X	X	Mathematics
TT 1ª	X	X	X	X	X	Mathematics and Surveying
TT 10ª	X	X	X	X	X	Mathematics and Surveying
CI	X		X	X		Mathematics and finance

Note. A = *Treatise on Arithmetic*; AP = *Practical Arithmetic for the use in Primary Schools*; AE = *Treatise on Elemental Algebra*; AS = *Treatise on Advanced Algebra*; GE = *Treatise on Elemental Geometry*; GA = *Treatise on Analytical Geometry*; TT = *Trigonometry and Topography*; CI = *Memory for the calculation of interest*

7.6. Level of achievement and scope of objectives

The following is a comparative analysis between the conclusions obtained and the objectives set at the beginning of this research. It also examines the extent to which these objectives have been achieved.

The general objective of this research was to contextualize the life and the totality work of the XIX century author Juan Cortázar from the point of view of the teaching of mathematics and relate them to the historical context in which it is developed. To this end, the following specific objectives were proposed:

O1: Conduct a content analysis of each book, in order to characterize what and how it is taught.

This objective has been extensively developed in Chapter 5, using the categories defined in sections 3.3.3. and 3.3.4. and through a content analysis of the eight works that were published by Juan Cortázar. This analysis has described - and represented in a conceptual map - the conceptual structure, the representation's systems, the phenomena and the didactic strategies used in each of the works.

The contents included in the works cover all stages of education, from primary to university and technical education, from the second half of the XIX century in Spain and even direct their attention to those people who, without knowing algebraic language, are interested in financial matters.

Thus, the *Treatise on Arithmetic* contains the operations and properties of abstract numbers, both integers and fractions, the divisibility of whole numbers and the practical applications of particular numbers, including problems of proportionality. *Practical arithmetic for the use in Primary Schools* also contains the operations and properties of whole numbers, fractions, decimal quantities, divisibility of whole numbers, study of complex and incomplete numbers, and study of proportions.

The works dedicated to the study of Algebra study algebraic language and the resolution of equations. Thus, the *Treatise on Elemental Algebra* contains the study of negative numbers and their operations, algebraic expressions and their operations, solving equations and the problems associated with them, calculating logarithms and calculating progressions and problems over them. The treatise on *Advanced Algebra* continues with the resolution of polynomial equations of degree equal to or greater than three, both by the general method, and for the particular cases of reciprocal equations or binomial and trinomial equations, transcendent equations, and series development of the rational, exponential, logarithmic and trigonometric functions.

The works dedicated to the study of Geometry study the elements and properties of flat and spatial geometry. Thus, *Elemental Geometry* demonstrates its constructions with drawing tools; *Analytical Geometry* constructs and demonstrates them with algebraic expressions; and the *Treatise on Trigonometry* solves the exercises on triangles by trigonometric reasons.

As regards works with greater practical application, the *Treatise on Topography* studies the problems associated with surveying through the different instruments of measurement and the *Memory for the calculation of interest* studies the problems of interest generated by capital and contracts on installment discounts.

Regarding the presence of representation's systems in the works of Cortázar, verbal and algebraic language are the basis for all works while algorithmic notations are the less frequent. The use of numerical and graphic representations is also common, but their presence depends on the degree of applicability of each text.

Finally, content analysis focused on phenomena and contexts shows a wide and varied use; encompass situations that occur in nature and are governed by laws of physics, situations that occur in social relationships to strictly mathematical situations. Cortázar's interest in showing situations that are associated with problems that may arise in real life or that have an important applicability, such as those associated with problems of surveying, is noteworthy.

O2: Carry out an analysis of the didactic activity of each work in order to characterize the latent ideas and the strategies that we can find.

After the comparative analysis of the didactic strategies used in the works, rigor and precision, the contribution of methodological suggestions, its own sequencing of contents and the relation of the theoretical contents with their application to everyday life, are characteristics that show the didactic relevance of Cortázar's production.

The analyzes carried out in Chapter 5, using the categories defined in section 3.3.5, have made it possible to achieve the stated objective.

O3: Perform an analysis of the approach of the works, indicating the different stages through which it takes place

Through the analysis carried out in Chapter 5, and through the analysis of the changes undergone in textbooks through the periods defined in section 3.1.2, the conclusions of sections 6.2, 6.3, 6.4. and 6.5. have been obtained on the evolution of each work, which respond to the achievement of the objective.

From the foregoing conclusions we deduce the diversity of contents that includes, since it covers all the disciplines of the school curriculum of the time; the versatility of its production, since it embraces the different educational stages; its rigor; since prevails in it the formality of the mathematical language and the concern to offer a mathematical text of high quality to the reader; and the evident didactic intention, which is reflected through the wide range of representation systems, phenomenologies and methodological proposals used in it.

Also, as noted above, the changes that all the works suffered during the different editions don't respond to the multiple laws of public instruction, promulgated and repealed of the time, but are the result of the improvements arising from the experiences in the exercise of his profession.

O4: Perform an analysis of the mathematical contents included in the curriculum of the time.

In section 4.2, we analyze the scientific and educational organization of mathematics in Spain with respect to its three levels, first, second and university, during the first three quarters of the XIX century. All this guarantees the achievement in reaching this objective.

This shows us the evolution that the mathematical contents in the school curriculum suffer through the different legislations implanted during the time. The cultivation of Mathematics, which at the beginning of the century was concentrated in institutions outside the University, such as societies, seminaries and academies, was progressively established in Schools of primary instruction, in which Arithmetic and notions of Geometry were studied; in Secondary teaching Institutes where elements of Arithmetic, Algebra up to the second degree equations, Elementary Geometry, Trigonometry and Topography were studied; and in the University, where Algebra, elementary and analytical geometry, descriptive geometry, trigonometry and differential and integral calculus were studied.

O5: Contextualize the figure of Juan Cortázar socially, historically and academically.

Taking into account the dissimilar economic, social and academic levels of the time, Cortázar was part of the members of the bourgeoisie who had access to the studies offered in the Schools of Latinity and Languages, so necessary to be eligible for university studies.

He was also one of the beneficiaries of liberal policies under the reign of Elizabeth II, who reopened the universities and scholarships for students to study in Paris when classes were suspended because of the cholera epidemic. For this reason, Cortázar had the opportunity to graduate as a Bridges and Roads Engineer at the Central School of Arts and Manufactures in Paris.

On his return to Spain, he joined as a professor in the Faculty of Philosophy and was appointed Professor of Elementary Mathematics to respond to the incorporation of studies of second teaching in the Spanish Institutes.

Likewise, the implementation of the Pidal Plan offered to his elementary works the opportunity to be part of the official lists of textbooks for Universities, Institutes and Professional Schools, to him to be graduated in Physical-Mathematical Sciences and to be named Professor of Superior Algebra and Analytical Geometry and, therefore, to their superior works to be part of the official lists for Faculties, Higher and Professional Schools.

This objective has been developed in Chapter 4, through the historical, social, scientific and educational contextualization of the period in which the author lived, as well as the biographical semblance of his life. It is therefore considered that the objective has been achieved.

Therefore, the achievement of the specific objectives described has allowed us to contextualize the life and academic production of the XIX century author Juan Cortázar from the point of view of the teaching of mathematics and relate them to the historical context in which it develops, which represents the achievement of the general objective set out in this research.

7.7. Contributions of this research

The results obtained in this research allow us to know what and how it is taught in the textbooks of the author who probably had more influence in the diffusion of school mathematics in Spain and in the mathematical education of the Spanish students of the second half of the XIX century.

This is the first complete analysis of the entire work of Juan Cortázar, which includes a complete description of the conceptual structure, the systems of representation, phenomenology and didactic strategies included in it, as well as a biographical sketch of the author.

The analysis of the texts has been carried out using the research methodology validated and applied in the investigations of Maz (2005), Picado (2012), J. I. López (2011), Sánchez (2015) or Madrid (2016). To this end, the categories of the conceptual structure of all the disciplines covered by the production have been created and the types of didactic phenomena and strategies included in the works have been included.

This research, like those mentioned above, consolidates a line of research belonging to the field of study of the History of Mathematics and Mathematical Education centered on relevant characters who are authors of textbooks, who studies their life historically, socially and Academically and their contributions from the mathematical and didactic point of view.

7.8. Limitations of this research

During the development of this research some limitations arose that hindered and slowed the process of data collection and analysis of works. The main difficulties were:

- In none of the analyzed works have been found references to other authors or other influences on which the author could have been based. Although Cortázar himself indicates on some occasion that he follows the French curricula in his texts, we don't know the author or authors he took as reference for the elaboration of his treatises.
- There is important documentation that has been impossible to locate or that it wasn't available to look up. Thus, it has only been possible to locate the first edition of *Practical Arithmetic for the use in primary school*s, making it impossible to analyze the changes produced in the following study period; and it has been impossible to locate the unpublished notes of *Infinitesimal Calculus*, *Rational Mechanics*, *Cosmography* and *Mathematical Logic*, preventing its analysis and inclusion in the investigation.
- Due to the fact that some of the studies indicated in Table 2-1, which have included Cortázar's works, don't share the same research methodology the results have not been able of being integrated, leaving some important aspects of the works uncovered.

7.9. Lines of research for future works

After the completion of this research, new topics of study arise that may be of interest as future lines of work. Among them, the following stand out:

- The location and analysis of the unpublished works of the author (*Infinitesimal Calculus, Rational Mechanics, Cosmography and Mathematical Logic*) and its integration with the present investigation would offer an integral study of the figure of Juan Cortázar.
- The location and analysis of the works of the author or authors in which Cortázar could have been based would allow to determine the degree of influence in his production.
- The analysis of the editions of the works regarding the changes introduced by the son of Cortázar, Daniel Cortázar, would allow to know the evolution that the works underwent until the first quarter of XX century.
- The analysis methodology used in this research would allow to analyze the figure and the mathematical production for school purposes of any author.

- The comparative analysis of Cortázar's works with those of other authors of contemporary textbooks, such as those of Zoel García de Galdeano or José Echegaray, would make it possible to determine the topicalility and originality of these works.

8. REFERENCIAS

Álvarez, Y. (2013). *Introducción del álgebra lineal en España y Colombia durante la segunda mitad del s. XIX y la primera del s. XX*. (Tesis Doctoral), Universidad de La Rioja, La Rioja.

Ausejo, E. (2007). Quarrels of a Marriage of Convenience: on the History of Mathematics Education for Engineers in Spain. *International Journal for the History of Mathematics Education*, *2*(1), 1-13.

Azcárate, P. y Serradó, A. (2006). Tendencias didácticas en los libros de texto de matemáticas para la ESO. *Revista de Educación*, (340), 341-378.

Bagni, G. (2011). Equations and Imaginary Numbers: A Contribution from Renaissance Algebra. En V. Katz, y C. Tzanakis C (eds), *Recent developments on introducing a historical dimension in mathematics education* (pp. 45-56). Washington: The Mathematical Association of America.

Barbin, E. (1991). The reading of original texts: how and why to introduce a historical perspective. *For the learning of mathematics, 11* (2), 12-13.

Barbin, E. y Bernard D. (2007) *Histoire et Enseignement des Mathématiques: Rigueurs, Erreurs, Raisonnements.* Lyon: Institut National de Recherche Pédagogique.

Barbin, E. (2010a). *Des défis mathématiques d'Euclide à Condorcet*. Paris: Vuibert.

Barbin, E. (2010b). Evolving geometric proofs in the 17th century: From icons to symbols. En G. Hanna, N. Jahnke y H. Pulte (eds.), *Explanation and proof in mathematics: Philosophical and educational perspectives* (pp. 237–252). New York: Springer.

Barbin, E. y Tzanakis, C. (2014). History of Mathematics and Education. En S. Lerman (ed), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 255-260). New York: Springer.

Bermúdez, J. (2005). *Génesis y evolución del dibujo como disciplina básica en la Segunda Enseñanza (1836-1936.* (Tesis Doctoral), Universidad de Murcia, Murcia.

Beyer, W. O. (2006). Algunos libros de Aritmética usados en Venezuela en el período 1826-1912. Revista de Pedagogía, *XXVII*(78), 71-110.

Bjarnadóttir, K. (2014). History of Teaching Arithmetic. En A. Karp y G. Schubring (eds.), *Handbook on the History of Mathematics Education* (pp. 431-457). Dordrecht: Springer.

Bolívar, A. (2002). "¿De nobis ipsis silemus?": Epistemología de la investigación biográfica narrativa en educación. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, *4* (1), 1-26.

Borg, W.R. (1963). Educational Research: An Introduction. Londres: Longman.

Boyer, C. (2003). *Historia de la matemática.* Madrid, España: Alianza.

Bracho-López, R., Jiménez-Fanjul, N., Maz-Machado, A., Torralbo-Rodríguez, M. y Fernández-Cano, A. (2014). Producción científica sobre narrativa en Educación Matemática en la Web of Science. *Bolema: Boletín de Educaçao Matemática*, *28*(49), 744-761.

Bruno, A. y Martinón, A. (2000). Contenidos matemáticos en la segunda enseñanza española del siglo XX. *Suma, 34*, 27-44.

Carabias, A.M. (1992). Autobiografía académica del colegial Juan Negrete de Velasco. En J.L. Martín (ed.) Actas del I Congreso de Historia de Salamanca, Vol. 2 (pp. 237-247). Universidad de Salamanca (ISBN 8460431312)

Carabias, A.M. (2013). Evolución histórica del colegio mayor. Del siglo XIV al XXI. *REDEX, Revista de educación de Extremadura, 5*, 67-81.

Caramalho, J. (2008). *Lacroix and the Calculus.* Springer Science & Business Media.

Carrillo, D. (2005). *La metodología de la aritmética en los comienzos de las escuelas normales (1838 1868) y sus antecedentes*. (Tesis Doctoral), Universidad de Murcia, Murcia.

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-124). Barcelona: Horsori.

Chan, Y. C. y Siu, M. K. (2012) Facing the change and meeting the challenge: mathematics curriculum of Tongwen Guan in China in the second half of the nineteenth century. *ZDM International Journal Mathematics Education, 44*(4), 461–472.

Choppin, A. (2000). Los manuales escolares de ayer a hoy: el ejemplo de Francia. *Historia de la educación: Revista interuniversitaria, 19*, 13-37.

Cohen, L. y Manion, L. (1990). *Métodos de investigación educativa.* Madrid: la Muralla.

Comas, J. (2015). *La enseñanza de las matemáticas en la Armada Española en el siglo XIX.* (Tesis Doctoral), Universidad de Zaragoza, Zaragoza.

Condori, A. P. (2011). *Historia de vida y metodología de enseñanza de la matemática de Jaime Alfonso Escalante Gutiérrez*. (Tesis Doctoral), Universidad de Salamanca, Salamanca.

Cortázar, J. (1847). Démonstration des analogies de Néper. Nouvelles annales de mathématiques, 6, 218-220. Recuperado el 15 de marzo de 2016 de http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6__218_1

Del Pozo M. M. (2005). La organización escolar española en el contexto europeo: política educativa y cultura pedagógica (1898-1967). *Historia de la educación: Revista interuniversitaria, 24*, 97-129.

Díaz, A. (1993). *El examen: textos para la historia y su debate.* México: Centro de Estudios sobre la Universidad.

Emereole, H. U., Shaka, G. y Charakupa, R. (2002). Brief history of the Secondary School Science Curriculum in Botswana form Pre-Independence to 2000. *CASTME Journal, 22*(3), 35-40.

Esteves, A. E. (2008). *Evolução histórica dos problemas de optimização eo seu tratamento no Ensino Secundário português nos séculos XX e XXI* . (Tesis Doctoral), Universidad de Salamanca, Salamanca.

Fauvel, J. (1991). Using History in Mathematics Education. *For the Learning of Mathematics, 11*(2), 3-6.

Fauvel, J. y van Maanen, J. A. (2000). *History in mathematics education: The ICMI study*. Dordrecht: Kluwer.

Fernández-Cano, A. y Rico, L. (1992). *Prensa y educación matemática*. Madrid: Síntesis.

Fox, D.J. (1981). *El proceso de investigación en educación.* Pamplona: Universidad de Navarra.

Freijd, P. (2013). Old algebra textbooks: a resource for modern teaching. *BSHM Bulletin, 28*, 25-36.

Furinghetti, F. (2003). Mathematical instruction in an international perspective: the contribution of the journal L'Enseignement Mathématique. En D. Coray (ed.), *One Hundred Years of L'Enseignement Mathématique. Moments of Mathematics Education in the Twentieth Century* (pp. 19-46). Geneva: L'Enseignement Mathématique.

Furinghetti, F. (2012). History and epistemology in mathematics education. En V. L. Hansen y J. Gray (Eds.), *History of mathematics*, in Encyclopedia of Life Support Systems (e-book). Oxford, UK: EOLSS Publishers.

Furinghetti, F., y Giacardi, L. (2012). Secondary school mathematics teachers and their training in pre- and post-unity Italy (1810–1920). *ZDM International Journal Mathematics Education, 44*(4), 537–550.

Furinghetti, F. y Somaglia, A. (1997). History of mathematics in school across disciplines. Mathematics in school, 27 (4), 48-51.

Gaceta de Madrid (1846, 8 de septiembre). Madrid: Imprenta Real. Recuperado de https://www.boe.es/datos/pdfs/BOE//1846/4377/C00001-00004.pdf

Gaceta de Madrid (1847, 11 de septiembre). Madrid: Imprenta Real. Recuperado de https://www.boe.es/datos/pdfs/BOE//1847/4745/A00001-00002.pdf

Gaceta de Madrid (1847, 24 de septiembre). Madrid: Imprenta Real. Recuperado de https://www.boe.es/datos/pdfs/BOE//1847/4758/A00001-00002.pdf

Gaceta de Madrid (1848, 15 de septiembre). Madrid: Imprenta Real. Recuperado de https://www.boe.es/datos/pdfs/BOE//1848/5116/A00001-00004.pdf

Gaceta de Madrid (1849, 25 de septiembre). Madrid: Imprenta Real. Recuperado de https://www.boe.es/datos/pdfs/BOE//1849/5491/A00001-00004.pdf

Gaceta de Madrid (1850, 28 de septiembre). Madrid: Imprenta Real. Recuperado de https://www.boe.es/datos/pdfs/BOE//1850/5920/A00001-00003.pdf

Gaceta de Madrid (1851, 6 de septiembre). Madrid: Imprenta Real. Recuperado de https://www.boe.es/datos/pdfs/BOE//1851/6263/A00002-00003.pdf

Gaceta de Madrid (1852, 19 de septiembre). Madrid: Imprenta Real. Recuperado de https://www.boe.es/datos/pdfs/BOE//1852/6663/A00001-00002.pdf

Gaceta de Madrid (1853, 21 de septiembre). Madrid: Imprenta Real. Recuperado de https://www.boe.es/datos/pdfs/BOE//1853/264/A00001-00002.pdf

Gaceta de Madrid (1854, 18 de octubre). Madrid: Imprenta Real. Recuperado de https://www.boe.es/datos/pdfs/BOE//1854/655/A00001-00003.pdf

Gaceta de Madrid (1855, 14 de octubre). Madrid: Imprenta Real. Recuperado de https://www.boe.es/datos/pdfs/BOE//1855/1014/A00001-00001.pdf

Gaceta de Madrid (1856, 18 de septiembre). Madrid: Imprenta Real. Recuperado de https://www.boe.es/datos/pdfs/BOE//1856/1354/A00001-00002.pdf

Gaceta de Madrid (1858, 1 de octubre). Madrid: Imprenta Real. Recuperado de https://www.boe.es/datos/pdfs/BOE//1858/274/A00002-00003.pdf

Gaceta de Madrid (1861, 27 de septiembre). Madrid: Imprenta Real. Recuperado de https://www.boe.es/datos/pdfs/BOE//1861/270/A00001-00001.pdf

Gaceta de Madrid (1861, 20 de octubre). Madrid: Imprenta Real. Recuperado de https://www.boe.es/datos/pdfs/BOE//1861/293/A00001-00002.pdf

Gaceta de Madrid (1861, 27 de octubre). Madrid: Imprenta Real. Recuperado de https://www.boe.es/datos/pdfs/BOE//1861/300/A00002-00003.pdf

Gaceta de Madrid (1862, 13 de septiembre). Madrid: Imprenta Real. Recuperado de https://www.boe.es/datos/pdfs/BOE//1862/256/A00001-00001.pdf

Gaceta de Madrid (1864, 3 de septiembre). Madrid: Imprenta Real. Recuperado de https://www.boe.es/datos/pdfs/BOE//1864/247/A00001-00002.pdf

Gaceta de Madrid (1867, 16 de septiembre). Madrid: Imprenta Real. Recuperado de https://www.boe.es/datos/pdfs/BOE//1867/259/A00002-00003.pdf

Gaceta de Madrid (1867, 24 de septiembre). Madrid: Imprenta Real. Recuperado de https://www.boe.es/datos/pdfs/BOE//1867/267/A00001-00004.pdf

García, E. (1984). La matemática en la España del siglo XIX. En M. Hormigón (coord.), *La ciencia y la técnica en España entre 1850 y 1936* (pp. 115-130). Jaca: SEHCYT.

Garma, S. (1978). La enseñanza de las matemáticas en España durante el segundo tercio del s. XIX. *Llull: Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas*, *2*, 26-34.

Garma, S. (1980). Los Matemáticos Españoles y la Historia de las Matemáticas del siglo XVIII al siglo XIX. En S. Garma (coord.). *El científico español ante su historia: la ciencia en la España entre 1750-1850* (pp. 59-72). Madrid: Diputación Provincial de Madrid.

Garma, S. (1988). Cultura matemática en la España de los siglos XVIII y XIX. En J.M. Sánchez (Ed.). *Ciencia y Sociedad en España: de la Ilustración a la Guerra Civil* (pp. 93-127). Madrid: Ediciones El arquero/CSIC.

Giol y Soldevilla, I., y Goyanes y Soldevilla, J. (1864). *Tratado de topografía*. Madrid: M. Minuesa.

Girón, R. M., y Girón, F. M. (2010). El matemático José Andrés Irueste (1844-1920) y su entorno. *La Gaceta de la RSME*, *13*(2), 353-378.

Gómez, B. (1995). Los métodos de cálculo mental vertidos por la tradición reflejada en los libros de aritmética. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 5,* 91-101.

Gómez, B. (1999). Tendencias metodológicas en la enseñanza de la proporcionalidad derivadas del análisis de los libros de antiguos: el caso de los problemas de compañías. *Relime, 2* (3), 19-29.

Gómez, B. (2000). Los libros de texto de matemáticas. En Antonio Martinón (Ed*.).Las matemáticas del siglo XX. Una mirada en 101 artículos,* pp. 77-80. Madrid: Nivola

Gómez, B. (2003). La investigación Histórica en Didáctica de la Matemática. En E. Castro, P. Flores, T. Ortega, L. Rico y A. Vallecillos (Eds.). *Investigación en Educación Matemática. VII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM*) (pp. 79-85). Granada: Universidad de Granada

Gómez, B. (2011a). Marco preliminar para contextualizar la investigación en historia y educación matemática*. Epsilon, 77*, 9-22.

Gómez, B. (2011b). El análisis de manuales y la identificación de problemas de investigación en Didáctica de las Matemáticas. *PNA, 5*(2), 49-65.

Gómez, B. (2014). Ambigüedad del signo radical. Un doble problema: matemático y didáctico. *La Gaceta de la RESME, 17* (1), 139-153.

Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. Revista EMA, 7(3), 251-292.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. (Tesis Doctoral), Universidad de Granada, Granada.

Goncalves, D. (2006). Cultura e práticas escolares: a escola pública brasileira como objeto de pesquisa. *Historia de la Educación, 25,* 153-171.

González, M.T. (2013) Las Historias de vida como metodología para la investigación en historia de la educación matemática. El caso del profesor Cuesta Dutari (1907-1989). *Revista Sigma, 11*(1), 1-9.

González, P.M. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas,45*, 17-28.

González, P.M. (2009). Historia de la matemática y dimensión cultural de las matemáticas. *Actes d'història de la ciència i de la tècnica, 2*(1), 337-346.

González, M. T y Sierra, M. (2002). La enseñanza del Análisis Matemático en los libros de texto españoles de enseñanza secundaria del siglo XX. *Historia de la educación: Revista interuniversitaria*, (21), 177-198.

González, M.T. (2013) Las Historias de vida como metodología para la investigación en historia de la educación matemática. El caso del profesor Cuesta Dutari (1907-1989). *Revista Sigma, 11*(1), pp. 1-9.

Goodson, I. (2003). Hacia un desarrollo de las historias personales y profesionales de los docentes. *Revista mexicana de investigación educativa, 8*(019), 733–758.

Guereña, J. L. (2015). El estudio del profesorado universitario en la historia contemporánea. *Historia y Memoria de la Educación, 1*(1), 395-417.

Guedes, F. (2010). Análise Narrativa em Trabalhos de História da Educação Matemática: algumas considerações. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 23*, 59-73.

Hill. J.E. y Kerber, A. (1967). *Models, Methods and Analytical Procedures in Educational Research*. Detroit: Wayne State University Press.

Hormigón, M. (1991). García de Galdeano's works on algebra. *Historia Mathematica, 18*, 1-15.

Irueste, J. A. (1912). D. Juan Cortázar. *Revista de la Sociedad Matemática Española, 1*(8), 285-290.

Karp, A. (2011). Toward a history of teaching the mathematically gifted: three possible directions for research. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *11*(1), 8-18.

Karp, A. (2014). The history of mathematics education: developing a research methodology. En A. Karp y G. Schubring (eds.), *Handbook on the history of mathematics education* (pp. 9-24). Dordrecht: Springer

Kourkoulos, M y Tzanakis, C. (2011). History of Statistics and Students' Difficulties in Comprehending Variance. En V. Katz, y C. Tzanakis C (eds), *Recent developments on introducing a historical dimension in mathematics education* (pp. 174-187). Washington: The Mathematical Association of America.

Krippendorff, K. (1990). *Metodología de análisis de contenido.* Barcelona: Paidós.

Madrid, M.J. (2016). *Los libros de aritmética en España a lo largo el siglo XVI*. (Tesis Doctoral), Universidad de Salamanca, Salamanca.

Madrid. M. J. y Maz-Machado, A. (2015). Analysis of two Spanish arithmetic books written in the XVI-century, Journal of Education, Psychology and Social Sciences 3, 117-121.

Madrid, M. J., Maz-Machado, A. y León-Mantero, C. (2015). Representations in the Sixteenth-Century arithmetics books, Universal Journal of Education Research 3, 396-401.

Madrid, M. J., Maz-Machado, A. y López C. (2015). Fenomenología y representaciones en el dorado contador de Miguel Gerónimo de Santa Cruz, *Ensayos, Revista de la Facultad de Educación de Albacete, 3*0(1), 63-72.

Magalhães, M.L. (2014). História da Educação Matemática, Formação de Professores a Distância e Narrativas Autobiográficas: dos sofrimentos e prazeres da tabuada. . *Bolema: Boletín de Educaçao Matemática, 28*(49), 820-840.

Martínez (2000). La gramática en los manuales escolares de Bachillerato. *Historia de la educación: Revista interuniversitaria, 19*, 95-119.

Matos, J. M. (1989). *Cronologia recente do ensino da Matemática*. Lisbon: APM.

Maz, A. (1999). Historia de la matemática en clase: ¿por qué? y ¿para qué? En Berenger, Mª. I.; Cardeñoso, J. Mª. y Toquero M. (Eds.) *Investigación en el aula de matemáticas. Matemáticas en la sociedad* (pp. 205-209). Granada: SociedadThales y Departamento de Didáctica de la matemática.

Maz, A. (2000). *Tratamiento de los números negativos en textos de matemáticas publicados en España en los siglos XVIII y XIX*. Granada: Universidad de Granada.

Maz, A. (2005). *Los números negativos en España en los siglos XVIII y XIX* . (Tesis Doctoral), Universidad de Granada, Granada.

Maz, A. (2009**)**. Investigación histórica de conceptos en los libros de matemáticas. En Gonzalez, M., González, M. y Murillo, J. (Eds.), *Investigación en Educación matemática XIII* , pp. 5-20. Santander: SEIEM

Maz-Machado, A. (2011).¿Por qué los profesores de matemáticas en formación necesitan la Historia de la matemáticas? Conferencia plenaria impartida en IV Jornadas de Educación Matemática y I Jornadas En Investigación en Educación Matemática. Santa fe, Argentina.

Maz, A. y Bracho, R. (2013). Acercamiento entre la historia de las matemáticas la educación matemática mediante el análisis de contenido. En Rico, L., Lupiañez, J. L.y Molina, M. (Eds.). *Análisis didáctico en educación matemática.*

Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular (pp. 349-358). Granada: Editorial Comares.

Maz-Machado, A., López, C. y Sierra, M. (2013). Fenomenología y representaciones en la Arithmetica de Juan de Yciar. En L. Rico L., Cañadas, M. C., Gutiérrez, J., Molina, M. y Segovia, I. (Eds.), *Investigación en Didáctica de las Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 77-84). Granda: Editorial Comares.

Maz, A., Torralbo, M. y Rico, L. (Eds.) (2006). *José Mariano Vallejo, el matemático ilustrado. Una mirada desde la Educación Matemática.* Córdoba: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba.

Maz, A. y Rico, L. (2007). Situaciones asociadas a los números negativos en textos de matemáticas españoles de los siglos XVIII y XIX. PNA, 1(3), 113-123.

Maz, A. y Rico, L. (2009a). Negative numbers in the 18th and 19th centuries: phenomenology and representations. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 17*(1), 537-554.

Maz, A. y Rico, L. (2009b). Las Liciones de Thomas Cerda: doscientos cincuenta años (1758-2008). *Suma* (60), 35-41.

Maz-Machado, A., y Rico, L. (2013). El Tratado elemental de matemáticas de José Mariano Vallejo en el bicentenario de su publicación. Suma(74), 55-63.

Maz-Machado, A., y Rico, L. (2015). Principios didácticos en textos españoles de matemáticas en los siglos XVIII y XIX. *RELIME, Revista latinoamericana de Investigación Educativa 18* (1), 49-76.

Maz, A., Rico,L. y Torralbo, M. (2006). José Mariano Vallejo y Ortega: Matemático y Político. En Maz, A., Torralbo, M. y Rico, L. (eds.): *José Mariano Vallejo, el matemático ilustrado. Una mirada desde la Educación Matemática* (pp. 11-25). Córdoba: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba.

Meavilla, V. y Oller , A. (2015). Los textos matemáticos de Antonio Terry y Rivas. *Números, 90*, 89-103.

Millán, A. (1988). *El matemático Julio Rey Pastor*. Logroño: Servicio de publicaciones del Colegio Universitario de la Rioja.

Moreno (2000). La física en los manuales escolares: un medio resistente a la renovación (1845-1900). *Historia de la educación: Revista interuniversitaria*, *19*, 51-93.

Moya, T. (2004). La enseñanza de las matemáticas y el déficit científico español del siglo XIX. En García, J. (Ed.), *Jornada de educación matemática de la Comunidad Matemática.*Valencia: Club Universitario.

León-Mantero, C., Madrid, M. J. y Maz-Machado, A. (2016). Efemérides de Agustín de Pedrayes y Foyo: un destacado matemático español del siglo XVIII. *Revista Números*, *92*, 49-56.

López, C. (2011). *La formación inicial de Maestros en Aritmética y Álgebra a través de los libros de texto.* Tesis doctoral. Universidad de Salamanca, Salamanca.

López, J. I. (2011). *Un análisis sistémico de la obra de José Mariano Vallejo desde la perspectiva de la investigación histórica en educación matemática.* Tesis doctoral. Universidad de Salamanca, Salamanca

López de Azcona, J.M., González, I. y Ruíz, E. (1992). *Minería Iberoamericana: repertorio bibliográfico y biográfico, 1492-1892* (Vol. 3).Madrid: IGME.

Lusa, G. (2003). *La Escuela de Ingenieros Industriales de Barcelona y la Introducción de la Electricidad Industrial en España (1872-1899).* Actas de la VII Trobada d'Història de la Ciència i de la Tècnica. Barcelona: SCHCT

Ortiz, E. (1996). The nineteenth-century international mathematical community and its connection with those on the Iberian periphery. En C. Goldstein, J. Gray & J. Ritter (Eds.), *L'Europe mathématique*. París: Maison des sciences de l'homme.

Ossenbach (2000). La investigación sobre los manuales escolares en América Latina: la contribución del Proyecto Manes. *Historia de la educación: Revista interuniversitaria*, *19*, 195-203.

Peralta, J. (1999). *La matemática española y la crisis de finales del siglo XIX*. Madrid: NIVOLA libros y ediciones.

Peralta, J. (2009). La matemática española del siglo XIX. En Conserjería de educación, universidades, cultura y deportes Gobierno de Canarias (Eds): *La Ciencia antes de la Gran Guerra. Actas año XVII* (pp. 211-236). Canarias: Fundación Canaria Orotava de Historia de la ciencia.

Peset, J. L. (1988). Educación y ciencia en el fin del Antiguo Régimen. En J.M. Sánchez (Ed.). *Ciencia y Sociedad en España: de la Ilustración a la Guerra Civil* (pp. 17-25). Madrid: Ediciones El arquero/CSIC.

Peset, J. L., Garma, S., y Pérez-Garzón, J. S. (1978). *Ciencias y enseñanza en la revolución burguesa*. Madrid: Siglo veintiuno.

Picado, M. (2012). *El Sistema Métrico Decimal en libros de texto de matemáticas en España durante la segunda mitad del siglo XIX (1849-1892).* . (Tesis Doctoral), Universidad de Granada, Granada.

Picado, M., Gómez, B., y Rico, L. (2013). El análisis didáctico en el estudio del sistema métrico decimal en un libro de texto histórico de matemáticas. En Rico, L., Lupiañez, J.L. y Molina, M. (eds.) Análisis Didáctico e Investigación en Educación Matemática, (pags, 403-414). Granada: Editorial Comares.

Picado, M. y Rico, L. (2011). La selección de textos en una investigación histórica en Educación Matemática. *Epsilon*, *77*, 99-112.

Puig, L. (1994). El De Numeris Datis de Jordanus Nemorarius como sistema matemático de signos, *Mathesis*, *10*, 47-92.

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (Coord.*), La Educación Matemática en la enseñanza secundaria* (pp.61-94). Barcelona: ICE-Horsori.

Puig, L. (1998). Componentes de una historia del álgebra. El texto de al-Khwarizmi restaurado. En F. Hitt (Ed.) *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 109-131). México, DF: Grupo Editorial Iberoamérica.

Puig, L. y Fernández, A. (2013). La *Arithmetica Algebratica* de Marco Aurel, primer álgebra impresa escrita en español. Preliminares para su estudio. En L. Rico L., Cañadas, M. C., Gutiérrez, J., Molina, M. y Segovia, I. (Eds.),*Investigación en Didáctica de las Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 143-150). Granda: Editorial Comares.

Ribeiro, M. C. (2012). *Um olhar sobre o ensino da Matemática guiado por António Augusto Lopes.* (Tesis Doctoral), Universidad Nova, Lisboa.

Rico, L.(1997). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L.Rico (Coord.), *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria* (pp.39-59). Barcelona: ICE-Horsori.

Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la Matemática. *Revista AIEM, Avances de Investigación en Educación Matemática, 1*, 39-63.

Rico, L. y Fernández-Cano, A. (2013). Análisis didáctico y metodología de investigación. En Rico, L., Lupiañez, J. L.y Molina, M. (Eds.). *Análisis didáctico en educación matemática. Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular* (pp. 1-22). Granada: Editorial Comares.

Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J. L., & Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales. Suma, 58, 7-23.

Rodríguez, C. (2009). *El instituto del Cardenal Cisneros de Madrid (1845-1877).* Madrid: CSIC.

Rodríguez, F. M. (2010). *Desarrollo conceptual de los métodos iterativos en la resolución de ecuaciones no lineales, un enfoque didáctico.* (Tesis Doctoral), Universidad de Salamanca, Salamanca.

Sabariego, M. y Bizquerra, R. (2009). El proceso de investigación (parte I). En R. Bizquerra (coord.) *Metodología de la Investigación Educativa* (pp. 90-125). Madrid: La Muralla.

Sánchez, J. M. (1999). Física y Matemática en la época de Torres Quevedo. En F. González y F.A. González (eds.), *Actas del III Simposio" Leonardo Torres Quevedo: su vida, su tiempo, su obra"* (pp. 45-58). Madrid: Amigos de la Cultura Científica.

Sánchez, J. M. (2004). José Echegaray: entre la ciencia, el teatro y la política. *Arbor, 1*79 (707/708), 601-688.

Sánchez, M. I. (2015). *La Geometría Analítica en los libros de texto para secundaria y universidad en España en el siglo XIX*. (Tesis Doctoral), Universidad de Salamanca, Salamanca.

Santos, F. (2014). Biografia do Orvalho: considerações sobre narrativa, vida e pesquisa em Educação Matemática. *Bolema: Boletín de Educaçao Matemática, 28*(49), 896-909.

Schubring, G. (1987). On the methodolgy of analysing historical textbooks: Lacroix as textbook authors. *For the learning of mathematics, 7*(3), 41-51.

Schubring, G. (1988). Discussions épistémologiques sur le statut des nombres négatifs et leur représentation das les manuels allemands et français de mathématique entre 1795 et 1845. *Actes du premier colloque franco-allemand de didáctique des mathématiques et de l´informatique* (pp. 137-145). Editions La Pensée Sauvage.

Schubring, G. (1989). Theoretical Categories for Investigations in the Social History of Mathematics Education and Some Characteristic Patterns. En C. Keitel, P. Damerow, A. Bishop, P. Gerdes (eds.), *Science and Technology Education. Mathematics, Education and Society. Document Series No. 35* (pp. 6-8). Paris: UNESCO.

Schubring, G. (2003). L'Enseignement Mathématique and the first International Commission (IMUK): the emergence of international communication and cooperation En D. Coray (ed.), *One Hundred Years of L'Enseignement Mathématique. Moments of Mathematics Education in the Twentieth Century* (pp. 47-66). Geneva: L'Enseignement Mathématique.

Schubring, G. (2006). Researching into the history of teaching and learning mathematics: The state of the art. *Paedagogica Historica,42* (4-5), 665–677.

Schubring, G. (2012a). From the few to the many: historical perspectives on who should learn mathematics. En K. Bjarnadóttir, F. Furinghetti, J. M. Matos y G. Schubring (eds.) *Proceedings of the second international conference on the history of mathematics education* (pp 443–462). Lisboa: Universidad Nova de Lisboa.

Schubring, G. (2012b). Antagonisms between German states regarding the status of mathematics teaching during the 19th century: Processes of reconciling them. *ZDM International Journal Mathematics Education, 44*(4), 525–535.

Schubring, G. (2014). On historiography of teaching and learning mathematics. En A. Karp y G. Schubring (eds.), *Handbook on the history of mathematics education* (pp. 3-8). Dordrecht: Springer

Schubring, G. y Karp, A. (2014). History of Mathematics Teaching and Learning Education. En S. Lerman (ed), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 260-267). New York: Springer.

Sekiguchi, Y. (2000). A history of mathematics education from an international perspective. *Nihon Sugaku Kyoiku Gakkaishi, 82*(7-8), 109-112.

Sierra, M. (1997). Notas de Historia de las Matemáticas para el Currículo de Secundaria. En L. Rico (coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 179-194). Barcelona: Horsori.

Sierra, M. (2000): El papel de la historia de la matemática en la enseñanza. En A. Martinón (ed.) *Las matemáticas del siglo XX. Una mirada en 101 artículos.* Madrid : Nívola, pp. 93-96. VV.AA.: Monografías de Editorial Nívola sobre Historia de las Matemáticas.

Sierra, M., González, M.T., y López, C. (1999). Evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de Bachillerato y Curso de orientación Universitaria (C.O.U.): 1949-1995. *Enseñanza de las Ciencias, 17*(3), 463-476.

Sierra, M., González, M.T. y López, C. (2003). El concepto de continuidad en los manuales españoles de enseñanza secundaria de la segunda mitad del siglo XX. Educación Matemática, 15(1), 21-50.

Sierra, M. y López, C. (2011). Margarita Comas (1892-1973) y su aportación a la educación matemática. *Epsilon, 77*, 23-38.

Sierra, M. y López, C. (2013). Análisis de contenido en Aritmética y Álgebra en manuales de Formación de Maestros (1839-1971). En Rico, L., Lupiañez, J.L. y Molina, M. (eds.) Análisis Didáctico e Investigación en Educación Matemática, (pags, 375-402). Granada: Editorial Comares.

Smith. D. E. (1958). *History of Mathematics* (Vol. I). Nueva York: Dover Publications.

Sotos, M. (2015). *Didáctica de las matemáticas y desarrollo profesional de una maestra. El caso de Maria Antònia Canals i Tolosa.* Tesis doctoral, Universidad de Salamanca.

Sureda, B. (2003). La investigación en Historia de la educación y los otros espacios de socialización y formación de los jóvenes en el siglo XX. Introducción. *Historia de la educación: Revista interuniversitaria*, (22-23), 27-32.

Tiana (2000). El Proyecto Manes y la investigación histórica sobre los manuales escolares (siglos XIX y XX). *Historia de la educación: Revista interuniversitaria, 19*, 179-194.

Ueno, K. (2012) Mathematics teaching before and after the Meiji Restoration. *ZDM International Journal Mathematics Education, 44*(4), 473-481.

Universidad de Madrid (1856). *Anuario de la Universidad Central para el curso 1856-1857*. Madrid: Autor

Universidad de Madrid (1857). *Anuario de la Universidad Central para el curso 1857-1858*. Madrid: Autor

Vea, F. (1995). *Las matemáticas en la enseñanza secundaria en España (s. XIX)*. Zaragoza: Universidad de Zaragoza.

Vea, F. (1998). Matemáticos y Matemáticas en el Instituto Provincial de Logroño (1843-1936). En L. Español (Ed.), *Matemática y Región: La Rioja. Sobre matemáticos riojanos y matemática en La Rioja* (pp. 267-298).

Vea, F. y Velamazán, M.A. (2011). La formación matemática en la ingeniería. En M. Silva (ed.), *Técnica e ingeniería en España. Volumen VI. El ochocientos. De los lenguajes al patrimonio* (pp. 299-344). Zaragoza: Real Academia de ingeniería.

Vicuña, G. (1875). Cultivo actual de las ciencias físico-matemáticas en España. *Discurso leído en la Universidad Central en el acto de apertura del curso académico 1875-1876*. Madrid: Imprenta de José M. Ducazcal.

Viñao, A. (1994). Les origines du corps professoral en Espagne: les Reales Estudios de San Isidro, 1770-1808. *Paedagogica historica International Joumal of the History of Education*, *30*(1), 119- 174.

Vea, F. (1998). Matemáticos y Matemáticas en el Instituto Provincial de Logroño (1843-1936). En L. Español (Ed.), *Matemática y Región: La Rioja. Sobre matemáticos riojanos y matemática en La Rioja* (pp. 267-298)

Viñao, A. (1993). Del espacio escolar y la escuela como lugar: propuestas y cuestiones. *Historia de la Educación*, *12-13*, 17-74.

Volkov, A. (2012). Recent publications on the early history of Chinese mathematics (essay review). *Educação Matemática Pesquisa*, *14*(3), 348–362.

Wussing, H. (1998). Lecciones de historia de las matemáticas. Madrid: Siglo XXI.

9. NOTAS

[1]El apellido Abasolo aparece escrito también Albásolo según la literatura consultada. Hemos decidido usar Abasolo por aparecer un mayor número de veces.

[2]El mes de nacimiento aparece en muchos escritos como el de julio. Análogamente nos declinamos a escribir junio por aparecer en un número mayor de ocasiones.

10.ANEXOS

10.1. Tabla cronológica de eventos políticos y académicos en España durante el siglo XIX

Tabla 10-1. *Tabla cronológica de eventos políticos y académicos en España durante el siglo XIX*

CONTEXTO HISTÓRICO ESPAÑOL	JUAN CORTÁZAR
1788 Carlos IV es nombrado rey.	
1793 Guerra contra Francia.	
1795 Paz de Basilea	
1796 Primer Tratado San Ildefonso con Francia. Guerra contra Inglaterra.	
1800 Segundo Tratado San Ildefonso con Francia.	
1801 Guerra contra Portugal.	
1804 Guerra contra Inglaterra.	
1805 Batalla Trafalgar, derrota franco-española frente a Inglaterra.	
1807 Entrada de las tropas francesas en la Península.	
1808 Fernando VIII es nombrado rey. Ocupación francesa. Comienzo Guerra Independencia Española. Comienza el reinado de José I Bonaparte.	
1809 Acciones guerrilleras por toda la Península.	1809 Nace en Bilbao
1810 Apertura de las Cortes de Cádiz.	
1812 Constitución de las Cortes de Cádiz	
1813 Vuelve a ser nombrado rey Fernando VII. Fin de la Guerra de la Independencia	
1814 Fernando VII instaura el absolutismo, deroga la Constitución de Cádiz, persiguen a los liberales, cierre de las Universidades. Comienza el Sexenio Absolutista.	
1820 Trienio Liberal: pronunciamiento militar en el que se establecieron la Constitución y los decretos de Cádiz. Fernando VII es obligado a firmar jurar la Constitución.	
1823 Fernando VII instaura de nuevo el absolutismo. Comienzo Década Ominosa: dura represión elementos liberales, cierre de periódicos y Universidades.	
	1827 Trabaja como profesor de Matemáticas en el colegio de Santiago

1830 Nacimiento de la princesa Isabel.	
1833 Muerte de Fernando VII. María Cristina es nombrada Regente. Comienza la Primera Guerra Carlista. Aparición primeros brotes epidemia cólera.	
1834 Aprobación del Estatuto Real	1834 Ingresa en la Escuela de Ingeniero de Caminos. Es becado para estudiar en París en la Escuela Central de Artes y Manufacturas.
1837 Constitución progresista de 1837	1837 Nombrado Catedrático de Matemáticas Elementales. Comienza a impartir Matemáticas del segundo año en el Instituto de Noviciado
	1838 Escribe su primer tratado de trigonometría, que no llega a publicar.
1840 Fin de la primera Guerra Carlista. Dimisión de María Cristina. Comienza la regencia de Espartero	
1843Comienza el reinado de Isabel II	1843 Publica Memoria sobre el Cálculo del Interés
1844 Comienza la Década Moderada.	
1845 Constitución moderada de 1845.	1845 Imparte Álgebra, Geometría y Trigonometría Analítica del cuarto curso y Matemáticas sublimes correspondientes a los estudios de Ampliación de Ciencias
1846 Comienza la segunda guerra carlista.	
	1847 Se licencia en Ciencias Físico-Matemáticas
1848 Inauguración del ferrocarril Barcelona-Mataró	
	1850 Es nombrado Catedrático de Álgebra Superior y Geometría Analítica y pasa a ocupar su cátedra en la Facultad de Ciencias de la Universidad Central
1856 Se aprueba la Constitución progresista que no llega a entrar en vigor.	
1857 Se promulga la Ley General de Instrucción Pública de Moyano.	1857 Imparte Geometría analítica en las secciones físico-matemáticas, químicas, y en la sección de naturales, la asignatura de Álgebra. Fue elegido miembro de la Real Academia de Ciencias Exactas
1868 Derrocamiento de Isabel II. Inicio del Sexenio Democrático	
1869 Constitución de 1869	
1870 I Congreso de la AIT.	
1871 Comienza el reinado de Amadeo I de Saboya.	

1872 Comienza la tercera guerra carlista. Se funda la Nueva Federación Madrileña de la AIT.	
1873 Abdicación de Amadeo I. Proclamación de la I República.	1873 Muere en Madrid
1874 Golpe de Estado. Fin de la República democrática. Se prohíbe la actividad de la AIT en España.	
1874 Alfonso es proclamado rey	

10.2. Línea cronológica de la vida de Juan Cortázar

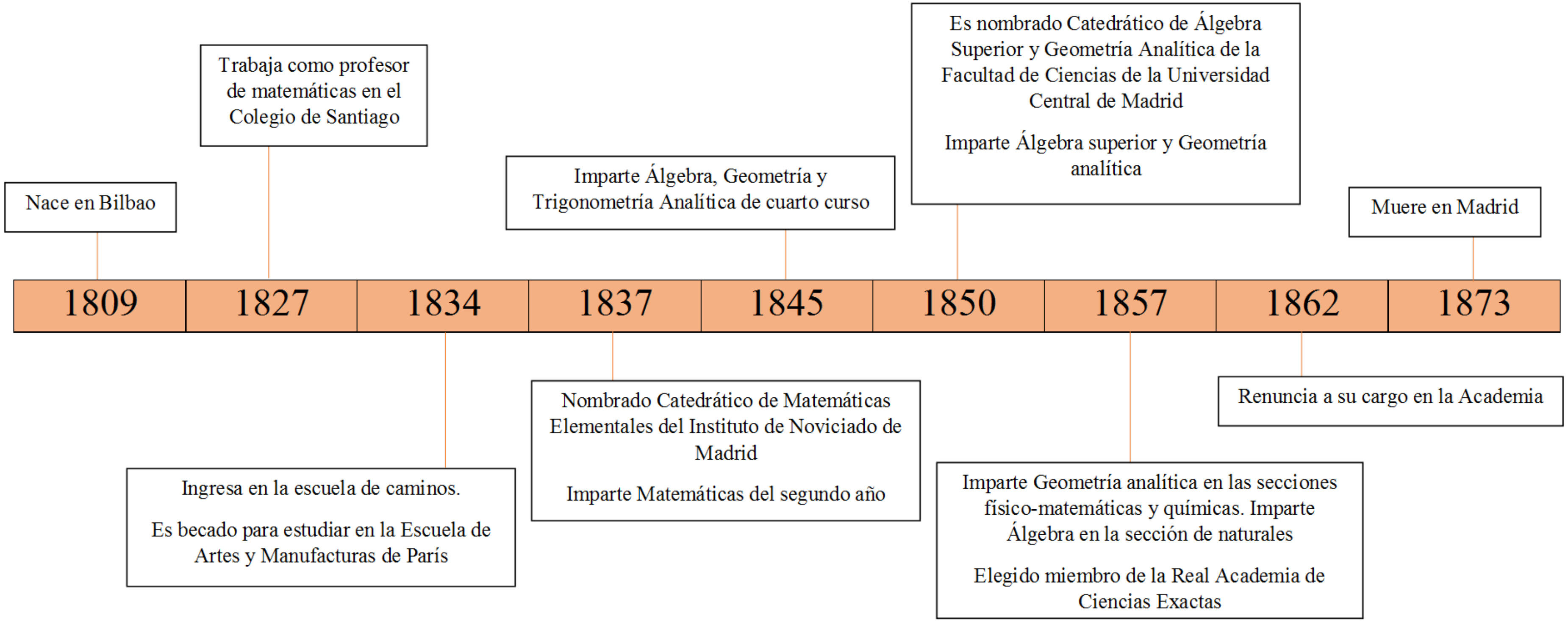


Figura 10-1. Línea cronológica de la vida de Juan Cortázar